Maquette Tournesol

Soleil, Terre et rotations

La géométrie et mathématiques du système

Maquette pour comprendre

PhM Observatoire de Lyon

Les repères classiques écliptique (longitudes et latitudes écliptiques) et équatorial (ascensions droites et déclinaisons) permettent de placer tous les éléments du système.

- le plan de l 'écliptique et la direction de son pôle Q.
- le plan équatorial et la direction du pôle nord P_N
- l'axe de rotation du Soleil et son pôle P_S
- le plan équatorial du Soleil

Voir les éléments et données des rotations dans l'Annexe I.

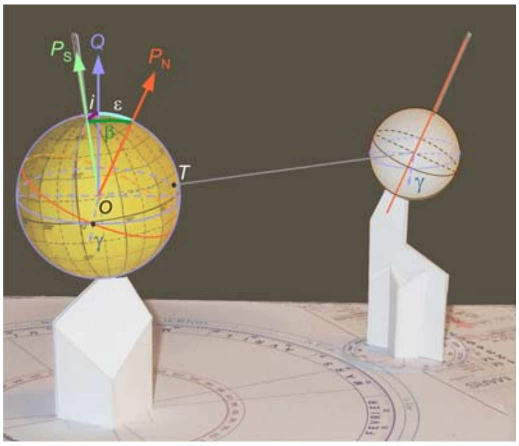


Fig. 1 -Les éléments de repérage sur la maquette.

Eléments de coordonnées sphériques

Soient les deux référentiels écliptique et équatorial (figure 2) :

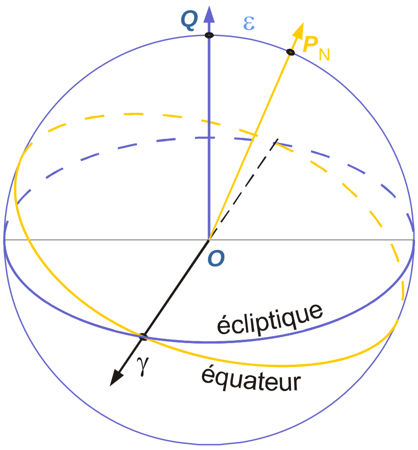


Fig. 2 - Référentiels écliptique et équatorial.

Plaçons l'axe de rotation du Soleil.

Coord. écliptiques du pôle P_S :
L_S et l_S
Coord. équatoriales du pôle P_S :
α_S et δ_S

Intéressons nous au triangle sphérique P_SP_NQ (figure 4) :

$$P_SQP_N = 90° - L_S$$
$$QP_SP_N = 270° - \alpha_S$$
$$\text{arc } P_SQ = i = 90° - l_S$$
$$\text{arc } P_NQ = \varepsilon$$

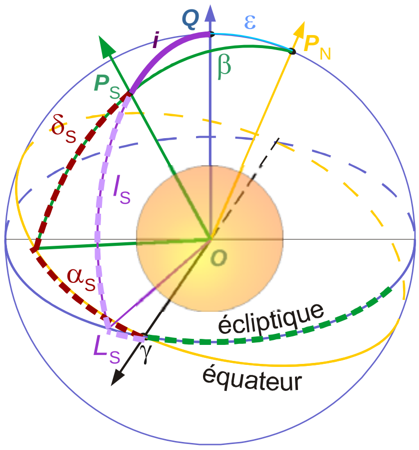


Fig. 3 - L'axe de rotation du Soleil.

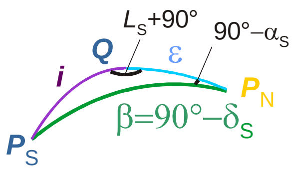


Fig. 4 - Triangle des pôles.

β angle entre les deux axes de rotation : $\beta = 90° - \delta_S = 26.15°$

Ce triangle contient tous les éléments de la rotation du Soleil :
i l'inclinaison du pôle
β angle entre les deux axes de rotation

On va voir que β est l'angle maximum entre les deux axes vus de la Terre.

Et la Terre ?

Elle se déplace sur l'écliptique (figure 5).
Soit à une date donnée la Terre en *T*.
Repérée par sa longitude écliptique L_T (fonction de la date).
Transformable en coordonnées équatoriales α_T et δ_T
Dans le triangle sphérique P_ST_PN, **l'angle polaire *P* est P_STP_S**

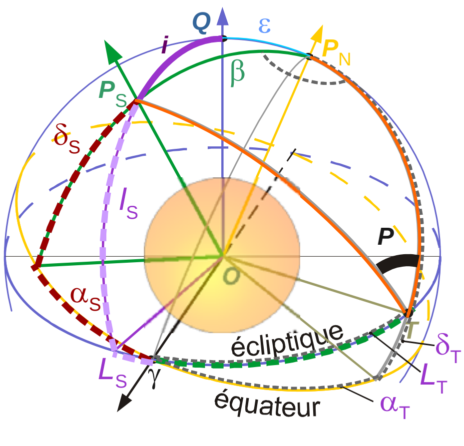


Fig. 5 - Position de la Terre.

Angle des axes de rotations

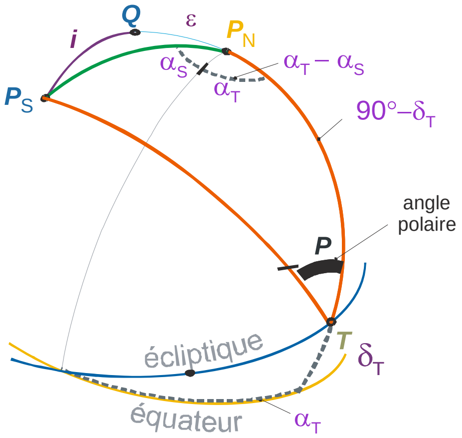


Fig. 6 - Angle polaire.

Simplifions la figure et ne gardons que les éléments utiles aux calculs
On peut préciser les éléments du triangle $P_N T P_S$ (figure 6) :

- Angle en P_N α_T - α_S
- Angle en T P ce que l'on cherche
- Arc $P_N T$ $90° - \delta_T$
- Arc P_N P_S $\beta = 90° - \delta_S$

Il nous manque l'arc $P_S T$ que l'on calcule par le même triangle $P_N T P_S$

$$\cos P_S T = \cos\beta\cos(90° - \delta_T) + \sin(90° - \delta_T)\sin\beta\cos(\alpha_T - \alpha_S)$$
$$= \cos\beta\sin\delta_T + \cos\delta_T\sin\beta\cos(\alpha_T - \alpha_S)$$

On utilise la formule qui donne un côté en fonction des deux autres et l'angle opposé.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos A$$

Calcul de Angle T soit (P)

- Arc P_NT 90° - δ_T
- Arc $P_N P_S$ β

Triangle $P_N T P_S$

La première formule de triangle sphérique donne le cosinus de P au signe près :

$$\cos P_N P_S = \cos\beta = \cos(90° - \delta_T)\cos(P_S T) + \sin(90° - \delta_T)\sin(P_S T)\cos P$$
$$= \sin\delta_T\cos(P_S T) + \cos\delta_T\sin(P_S T)\cos P$$

Il nous faut le sinus pour lever l'ambiguïté :

$$\frac{\sin P}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha_T - \alpha_S)}{\sin(arcP_S T)} \qquad \text{formule des sinus}$$

Résumons :
Pour une date donnée, on connaît avec précision, la position de la Terre sur l'écliptique (sa longitude écliptique).
Un changement de repère donne l'ascension α_T et la déclinaison δ_T héliocentrique de la Terre.
Avec les éléments de l'axe de rotation du Soleil, on peut calculer l'angle P.
Comme l'angle P varie dans une plage qui reste entre -90° et 90°, la formule qui donne sin P suffit pour le calculer sans ambiguïté sur le signe.

$$\sin P = \frac{\sin\beta\sin(\alpha_T - \alpha_S)}{\sin(arcP_S T)}$$

Méridiens et équateur solaire

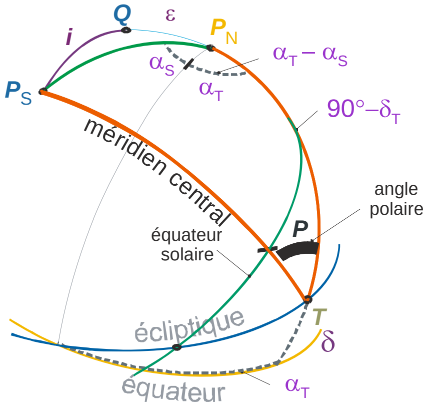


Fig. 7 - Méridien central.

Méridien central : méridien solaire qui passe par la Terre (constamment variable) soit l'Arc $P_S T$ (figure 7).
Equateur solaire :
Grand cercle perpendiculaire à l'axe de rotation du Soleil
Nœuds : intersections équateur solaire et plan de l'écliptique
Ω : nœud ascendant
γΩ = longitude du nœud ascendant
γΩ = (75.76 + 0.01397 . T)°, temps compté en années depuis J2000.0.
La longitude du nœud varie à cause de la précession des équinoxes.

Et l'angle B_0 inclinaison de l'axe vers l'observateur (figure 8)?

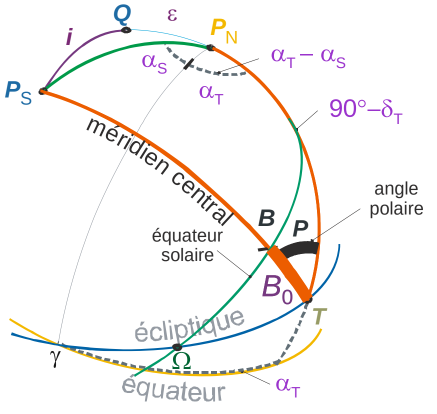


Fig. 8 - Inclinaison du plan équatorial (B_0).

Il nous faut l'équateur solaire .
Le méridien central est l'arc $P_S T$. Il coupe l'équateur solaire en B
L'angle B_0 est l'arc BT.
Par construction arc BP_S = 90°
Avec les arc orientés de l'équateur au pôle :

$$\text{arc } BT = \text{arc } BP_S - \text{arc } PST$$
$$B_0 = 90° - \text{arc } TP_S$$

B_0 : distance sur le méridien central du point de l'équateur au point central T de l'alignement Terre-Soleil

$$\sin B_0 = \sin(P_S\text{T} - 90°) = -\sin(90°\text{-PST}) = -\cos \text{PST}$$

Repérage sur la surface du Soleil

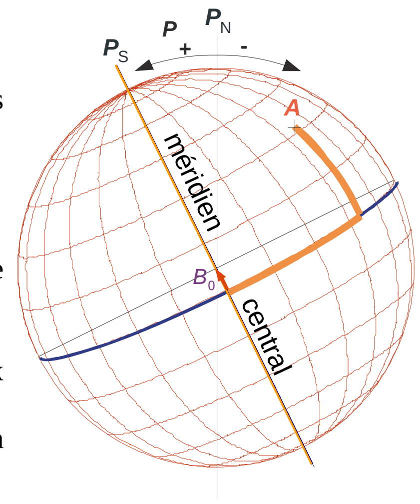


Fig. 9 - Projection stéréographique.

On définit sur le Soleil un système de coordonnées identiques aux longitudes et latitudes sur Terre (figure 9).

- axe des pôles
- équateur
- méridien central (servant d'origine des longitudes).

Une tache en A est définie par ses longitude et latitude au moment de l'observation.
Repérage et orientation de l'inclinaison de l'image du Soleil :
Pour définir cette position au moment de l'observation, on se sert de deux variables calculables ou données par les éphémérides :
- l'angle polaire P : rotation apparente de l'axe polaire du soleil sur la direction Nord, compté positivement vers l'Est
- l'angle B_0 : latitude héliographique du point central de vision du Soleil, positive quand l'équateur est au sud.

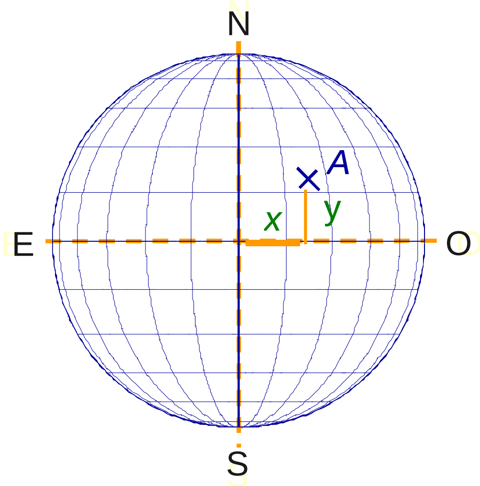


Fig. 10 - Coordonnées rectangulaires.

Les observations bien faites donnent des images que l'on peut orienter
Nord – Sud
Est – Ouest
Un point A de la surface (tache solaire) est repéré et positionné par ses coordonnées x et y (figure 10).
Alors que sur la sphère on se repère en coordonnées sphériques au moyen d'une projection orthographique.

Comment passer d'un système à l'autre ?

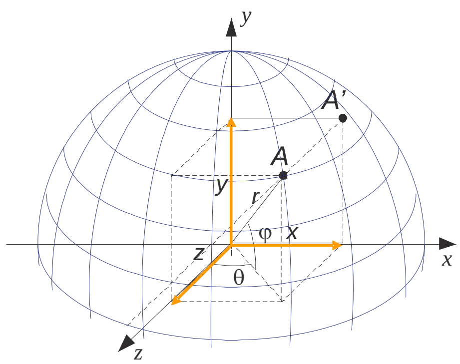


Fig. 11 - Coordonnées polaires

Soit un point A (x, y, z) sur la sphère de rayon r, avec l'axe z dirigé vers la Terre projeté en A' (figure 11).
Attention à l'orientation du repère $Oxyz$: l'axe Oz est dirigé vers l'observateur et le plan xOy est dans le plan de la feuille.
Passons en coordonnées sphériques :
La position du point A (x, y, z) sur la sphère correspond au système de coordonnée (r, θ, φ)
Sa projection est en A' dans le plan xy.
Passage de x et y à (r, θ, φ) :

$$\varphi \ : \ \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\theta : \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

avec $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Passage du repère équatorial Terre au repère équatorial Soleil (figure 12) :
Angle P ➜ rotation de P autour de Oz
Angle B_0 ➜ rotation de B_0 autour de Ox
Après ces deux rotations dans cet ordre on obtient les transformations :

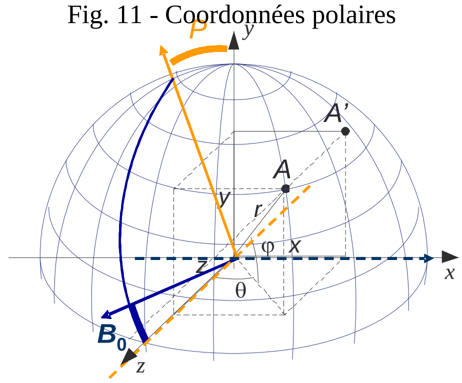


Fig. 12 - Rotations de redresssement.

$$\left.\begin{array}{l} \theta \ \text{ en longitude du point A : } L_A \\ .\varphi \ \text{ en latitude du point } A : l_A\,. \end{array}\right\} \quad \text{Coordonnées héliographiques}$$

Equations de passage de *x* et *y* à la longitude et latitude rapportées à l'équateur solaire et au méridien central

Le calcul matriciel est le plus commode :
Angle P ➜ rotation de P autour de Oz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos P & -\sin P & 0 \\ \sin P & \cos P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Angle B_0 ➜ rotation de B_0 autour de Ox

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_0 & -\sin B_0 \\ 0 & \sin B_0 & \cos B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Latitude l :
$$\sin l = \frac{y''}{r}$$

Longitude L :
$$\cos L = \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + z''^2}} \quad \sin L = \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + z''^2}}$$

Cette longitude a pour origine le méridien central.

Application sous Geogebra : heliopos.ggb

Image géo orientée

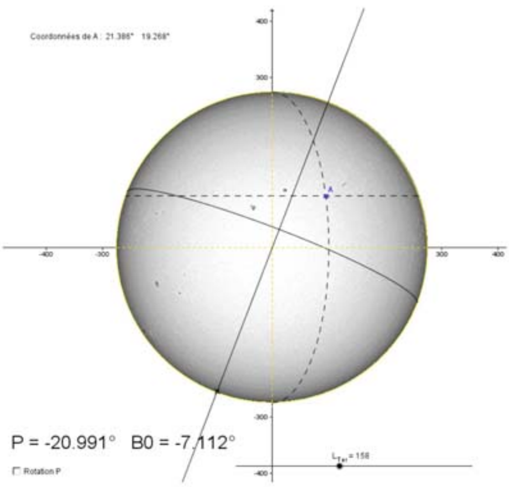
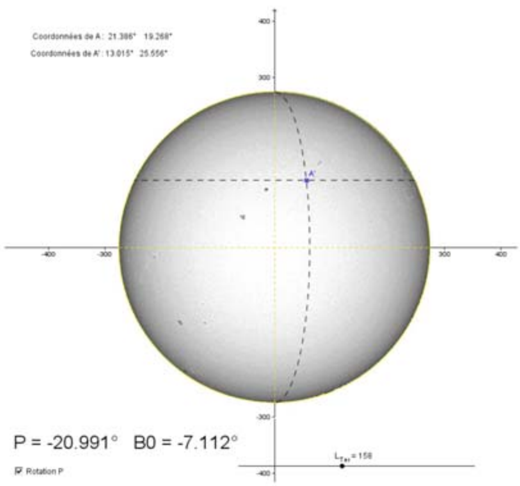


Image hélio orientée



Le rayon du Soleil est pris pour unité.
La date se donne par la longitude héliocentrique de la Terre (voir Annexe 2 pour passer dde la date à la longitude et inversement)
L'animation donne : les rotations, les positions de l'axe, de l'équateur, du pôle visible en fonction de la position en longitude de la Terre.

Rotations et longitudes

Longitudes sur le Soleil

A cause des rotations du Soleil et de la Terre, un point solaire change constamment de position par rapport au méridien central aligné sur la Terre.
Ce point s'il ne bougeait pas à la surface du Soleil, aurait sa latitude héliographique constante.
Il tournerait par rapport aux étoiles avec une période sidérale de 25.38 jours à l'équateur et moindre en allant vers les pôles.
Par rapport à la Terre, sa période synodique sera de 27.2753 jours en moyenne (avec la date, cela dépend de la position de la Terre sur l'écliptique, et de la vitesse de rotation autour du Soleil), ce qui correspond à 13.2° / jour.

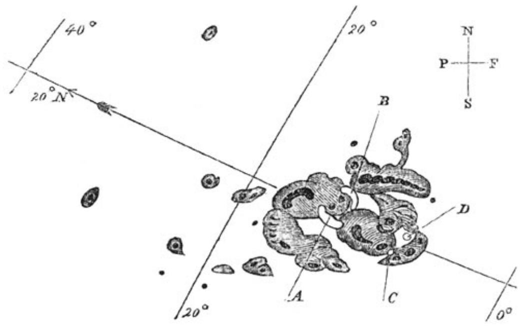
On peut fixer un méridien référence sur le Soleil (méridien primaire ou origine), la longitude du méridien central L_0 en référence à ce méridien primaire diminue constamment de 360 à 0° avec les conventions admises de rotation d'Est en Ouest.
La longitude absolue d'un point sera alors :

$$L_S = L_0 + L$$

L longitude mesurée en respect du méridien central.
Et comptée positivement vers le bord Ouest du Soleil.

Longitudes sur le Soleil – repérage du méridien origine

On utilise le système de Richard C. Carrington (1826 - 1875)
Il observa le Soleil en amateur éclairé de 1859 à 1861. Observations publiées en 1863 :
Observations of the sun from november 9, 1853, to march 24, 1861, made at Redhill.



Tache solaire du 1er september 1859 observée par Richard Carrington

Référence de ses observations :
Google Books : http://books.google.com/?id=8TQAAAAAQAAJ&printsec=frontcover&dq=richard+carrington

Définition du méridien origine :
Il prit comme période sidérale 25.38 jours
Et comme méridien origine, le méridien central de sa première observation le Nov 9, 1853
Références actuelles :
Le méridien standard sur le Soleil est défini comme étant le méridien qui passait au nœud ascendant de l'équateur solaire le 1er janvier 1854 à 12 heures TUC.
Le comptage des rotations se fait depuis le 9 nov 1853.
C'est le numéro de rotation Carrington, nombre entier non nul.

Le numéro de rotation Carrington donne l'instant de longitude 0 du méridien central.

Rot.No.	yy	mm	day	Date	Julian date
2128	2012	9	11.2897	2012.69478	2456181.78971
2129	2012	10	8.5664	2012.76931	2456209.06638
2130	2012	11	4.8622	2012.84389	2456236.36215
2131	2012	12	2.1725	2012.91850	2456263.67244
2132	2012	12	29.4975	2012.99316	2456290.99750
2133	2013	1	25.8349	2013.06804	2456318.33490
2134	2013	2	22.1755	2013.14295	2456345.67546
2135	2013	3	21.4971	2013.21780	2456372.99708
2136	2013	4	17.7802	2013.29255	2456400.28017
2137	2013	5	15.0194	2013.36718	2456427.51934
2138	2013	6	11.2266	2013.44172	2456454.72660

Calculs en ligne de la rotation de Carrigton http://bass2000.obspm.fr/ephem.php
Pour une date donnée, il faut ajouter la rotation effectuée par le méridien primaire depuis le début de la dernière rotation à la vitesse de rotation synodique et en tenant compte des irrégularités dues à l'excentricité de l'orbite de la Terre.
On peut passer pour le temps écoulé par le jour julien.
Calcul jour julien en ligne :
http://www.imcce.fr/langues/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages2/278.html
On peut utiliser divers logiciels ou se servir des éphémérides de l'IMCCE

SOLEIL. – 1989-1997
ROTATIONS SYNODIQUES

Commencement		Numéro	Commencement		Numéro	Commencement		Numéro
	1989			1992			1995	
Janv.	9,17	1811	Janv.	5,17	1851	Janv.	27,51	1892
Févr.	5,51	1812	Févr.	1,51	1852	Févr.	23,85	1893
Mars	4,85	1813	Févr.	28,85	1853	Mars	23,17	1894
Avril	1,15	1814	Mars	27,16	1854	Avril	19,45	1895
Avril	28,42	1815	Avril	23,43	1855	Mai	16,68	1896
Mai	25,64	1816	Mai	20,66	1856	Juin	12,89	1897
Juin	21,84	1817	Juin	16,87	1857	Juill.	10,09	1898

Numéro
Rotation
Carrigton

SOLEIL. – 1989-1997
ROTATIONS SYNODIQUES

Commencement		Numéro	Commencement		Numéro	Commencement		Numéro
	1989			1992			1995	
Janv.	9,17	1811	Janv.	5,17	1851	Janv.	27,51	1892
Févr.	5,51	1812	Févr.	1,51	1852	Févr.	23,85	1893
Mars	4,85	1813	Févr.	28,85	1853	Mars	23,17	1894
Avril	1,15	1814	Mars	27,16	1854	Avril	19,45	1895
Avril	28,42	1815	Avril	23,43	1855	Mai	16,68	1896
Mai	25,64	1816	Mai	20,66	1856	Juin	12,89	1897
Juin	21,84	1817	Juin	16,87	1857	Juill.	10,09	1898

Longitude
méridien central

Annexe 1

Eléments de la rotation du Soleil

Périodes de rotation :
  Sidérale : 25.38 jours
  Synodique : 27.2753 jours

Orientation de son axe de rotation et du plan équatorial :
  - Inclinaison du plan équatorial sur le plan de l'écliptique : 7.25°

  Coordonnées écliptiques
   - Longitude écliptique de l'axe de rotation : 345.76°
   - Latitude écliptique de l'axe de rotation : 82.75°
   - Longitude du nœud ascendant de l'équateur solaire :
    (75.76 + 0.01397 . T)°, temps compté en années depuis J2000.0.

  Coordonnées équatoriales
   - Ascension droite de l'axe de rotation : 286.11° (19h04min)
   - Déclinaison de l'axe de rotation : 63.85°

Annexe 2

Longitudes héliocentriques moyennes de la Terre sur un an

A cause du découpage de l'année en jour entier et des années bissextiles, les longitudes héliocentriques de la Terre chaque jour à 0h TU oscillent autour de valeur moyenne (et aussi à cause du couple Terre-Lune). Ces longitudes moyennes sont bien suffisantes avec leur précision pour effectuer les calculs de P et B_0.

Date	Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Oct.	Nov.	Déc.	Date
1	100.7	132.3	160.6	191.4	220.8	250.7	279.3	308.9	8.0	38.7	69.0	1
2	101.8	133.3	161.6	192.4	221.8	251.6	280.3	309.9	9.0	39.7	70.0	2
3	102.8	134.3	162.6	193.4	222.7	252.6	281.2	310.8	10.0	40.7	71.0	3
4	103.8	135.3	163.6	194.4	223.7	253.6	282.2	311.8	10.9	41.7	72.0	4
5	104.8	136.3	164.6	195.4	224.7	254.5	283.2	312.8	11.9	42.7	73.0	5
6	105.8	137.4	165.6	196.4	225.6	255.5	284.1	313.7	12.9	43.7	74.0	6
7	106.8	138.4	166.6	197.3	226.6	256.4	285.1	314.7	13.9	44.7	75.0	7
8	107.9	139.4	167.6	198.3	227.6	257.4	286.0	315.6	14.9	45.7	76.1	8
9	108.9	140.4	168.6	199.3	228.5	258.3	287.0	316.6	15.9	46.8	77.1	9
10	109.9	141.4	169.6	200.3	229.5	259.3	287.9	317.5	16.9	47.8	78.1	10
11	110.9	142.4	170.6	201.3	230.5	260.2	288.9	318.5	17.8	48.8	79.1	11
12	111.9	143.4	171.6	202.3	231.4	261.2	289.8	319.5	18.8	49.8	80.1	12
13	113.0	144.4	172.6	203.2	232.4	262.2	290.8	320.4	19.8	50.8	81.1	13
14	114.0	145.5	173.6	204.2	233.4	263.1	291.7	321.4	20.8	51.8	82.2	14
15	115.0	146.5	174.6	205.2	234.3	264.1	292.7	322.3	21.8	52.8	83.2	15
16	116.0	147.5	175.6	206.2	235.3	265.0	293.6	323.3	22.8	53.8	84.2	16
17	117.0	148.5	176.6	207.1	236.3	266.0	294.6	324.3	23.8	54.8	85.2	17
18	118.1	149.5	177.6	208.1	237.2	266.9	295.6	325.2	24.8	55.8	86.2	18
19	119.1	150.5	178.6	209.1	238.2	267.9	296.5	326.2	25.8	56.8	87.2	19
20	120.1	151.5	179.5	210.1	239.2	268.8	297.5	327.2	26.8	57.8	88.3	20
21	121.1	152.5	180.5	211.1	240.1	269.8	298.4	328.1	27.8	58.8	89.3	21
22	122.1	153.5	181.5	212.0	241.1	270.8	299.4	329.1	28.8	59.8	90.3	22
23	123.1	154.5	182.5	213.0	242.0	271.7	300.3	330.0	29.7	60.9	91.3	23
24	124.2	155.5	183.5	214.0	243.0	272.7	301.3	331.0	30.7	61.9	92.3	24
25	125.2	156.5	184.5	215.0	244.0	273.6	302.2	332.0	31.7	62.9	93.3	25
26	126.2	157.6	185.5	215.9	244.9	274.6	303.2	332.9	32.7	63.9	94.4	26
27	127.2	158.6	186.5	216.9	245.9	275.5	304.1	333.9	33.7	64.9	95.4	27
28	128.2	159.6	187.5	217.9	246.8	276.5	305.1	334.9	34.7	65.9	96.4	28
29	129.2		188.5	218.8	247.8	277.4	306.1	335.8	35.7	66.9	97.4	29
30	130.3		189.5	219.8	248.8	278.4	307.0	336.8	36.7	67.9	98.4	30
31	131.3		190.4		249.7		308.0	337.8	37.7		99.5	31