Astrogebra

Les orbites elliptiques des planètes

L’ellipse orbite des planètes sous Geogebra

1 - Contexte historique.

L’héliocentrisme des astronomes éclairés de la fin du XVI[ème] siècle conduit Kepler (1571-1630) à chercher dans l’ellipse la clé des orbites des planètes.

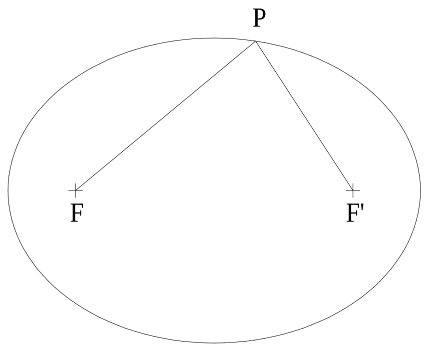
La première loi de Kepler en est l’aboutissement.

Chaque planète décrit dans le sens direct une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.Celle-ci peut être mise sous forme analytique en coordonnées polaires ou cartésiennes

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La définition géométrique est encore plus simple à mettre en œuvre :

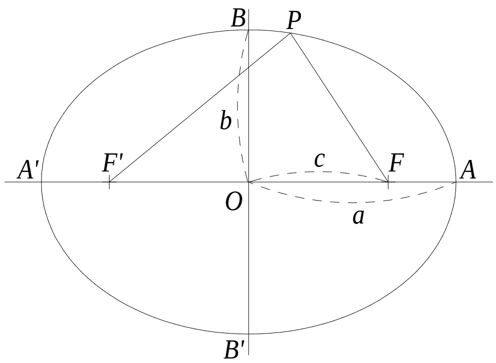
Lieu géométrique d’un point dont la somme des distances à deux autres points appelés foyers est constante.



Pour étudier la forme des orbites elliptiques des planètes nous allons utiliser **Geogebra**.

- Peu de formules mathématiques
- visualisation immédiate
- programmation intuitive

2 - L’ellipse



Paramètres d’une ellipse

AA’ grand axe
BB’ petit axe
a demi-grand axe
b demi-petit axe
c distance centre – foyer
e excentricité = *c/a*

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad b = a\sqrt{1-e^2}$$

On prendra

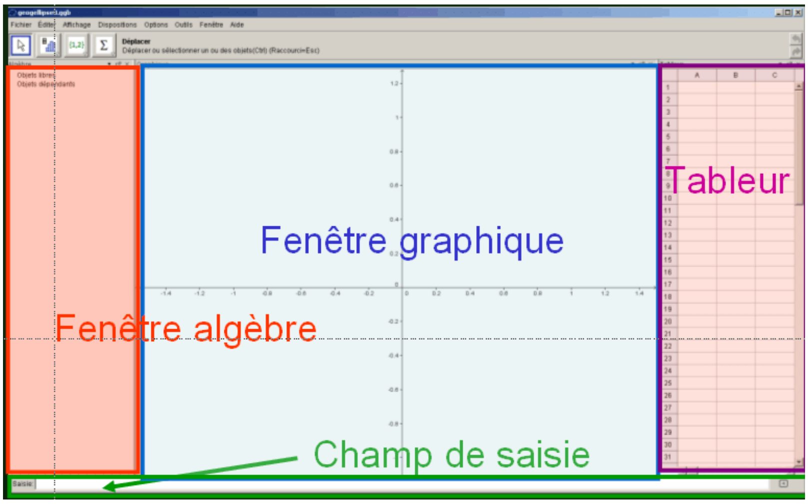
- $a = 1$
- paramètre de variation : excentricité *e*.

Les autres paramètres *b* et *c* en découlent.

Pour se rattacher à l’Astronomie :

en *F* est le Soleil
P est la planète sur son orbite elliptique
A périhélie
A’ aphélie
e aplatissement de l’orbite.

3 - Geogebra: premiers contacts



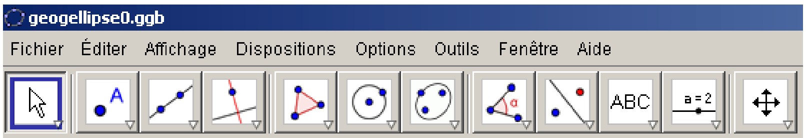
Lancer Geogebra
Utiliser le fichier *geogellipse0.ggb*

Géogébra comporte quatre fenêtres :

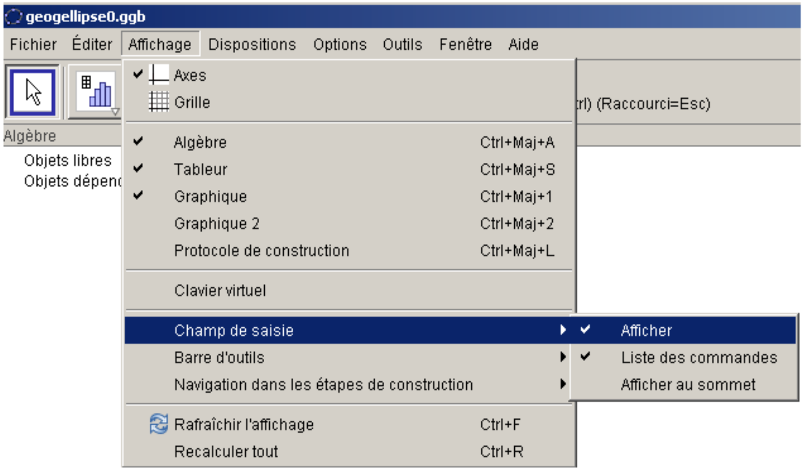
- *Fenêtre graphique*
- *Fenêtre algèbre*
- *Champ de saisie*
- *Tableur*

On n'utilisera pas la fenêtre Tableur.

Si fenêtre algèbre n'est pas ouverte



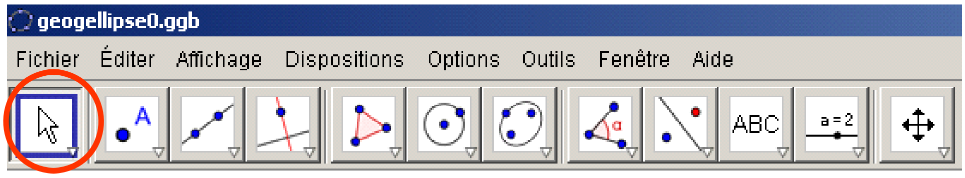
Cliquer sur *Affichage*



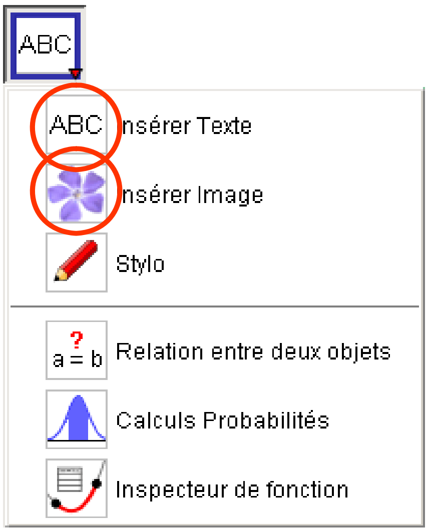
Cliquer sur *Fenêtre Algèbre*.

Idem pour la fenêtre *Champ de saisie*.

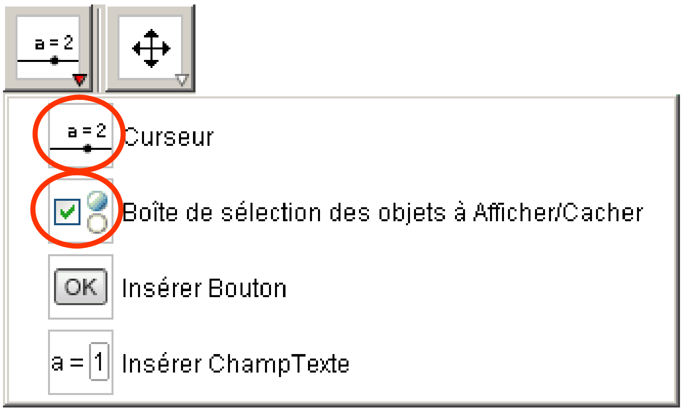
Premières touches



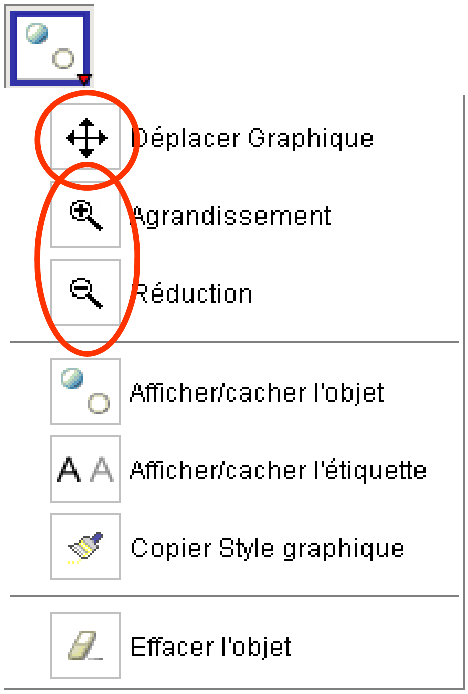
Sélection d'un objet à la souris (clic gauche) et déplacement(quand on tient appuyé le bouton gauche).



- Afficher un texte, la valeur d'une variable...
- Insérer une image

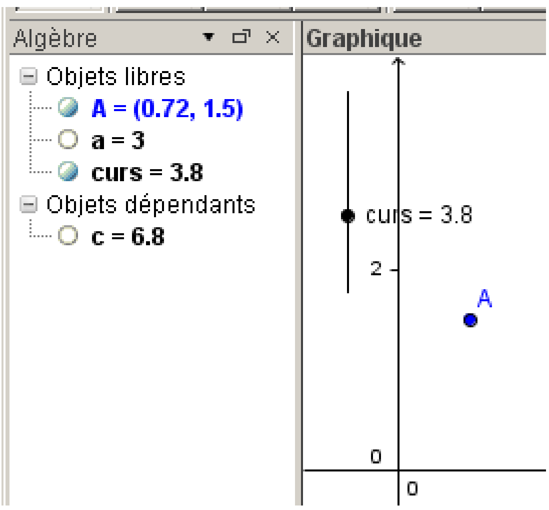


- Curseur : permet de faire varier une valeur
- Boîte d'affichage : pour faire apparaître ou disparaître un objet.



- Déplacement de tout le champ dans la fenêtre graphique
- ZOOM mais utiliser aussi la ***molette de la souris***

En zoomant +/-, le point sous le curseur de la souris est centre de zoom.



Objets

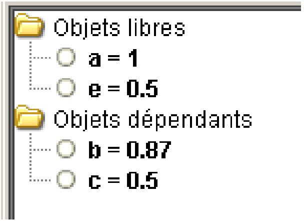
Deux grandes classes d'objets :
- les objets libres, par ex. :données **a** point **A**, curseur **curs**
- les objets dépendants **c** qui vaut **a** + **curs**

Geogebra distingue les majuscules des minuscules.

Indices

L'écriture des indices se fait par :
Un seul caractère à l'indice : A_L donne A_L
Plusieurs caractères à l'indice : A_{Sol} donne A_{Sol}
A_Sol donne $A_S$ol

4 - Création des paramètres de l’ellipse



Dans la fenêtre *Champ de saisie* écrire :

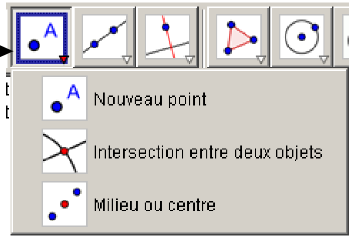
a=1 Enter
e=0.5 Enter
*c=a*e* Enter
*b=sqrt(a*a-c*c)* Enter

Se servir des flèches ➡⬅⬆⬇ dans le *champ de saisie* pour revenir à d’anciennes lignes afin de corriger ou de transformer.

Ces données apparaissent dans la fenêtre algèbre
a et *e* dans la partie *Objets libres*
b et *c* dans la partie *Objets dépendants* car calculés à partir d’autres objets.

Construction de l’ellipse

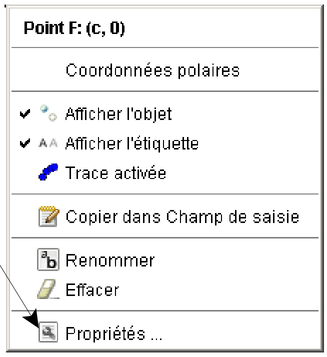
Création des deux points foyers *F* et *F’*
On ne peut créer le point directement à la souris, par la commande



et en cliquant bouton droit sur son emplacement car *F* et *F’* dépendent de la valeur de l’excentricité *e*.
On va les créer par la *ligne de saisie*
Syntaxe d’un point : < *Point = (abscisse,ordonnée)* >
Pour les foyers :

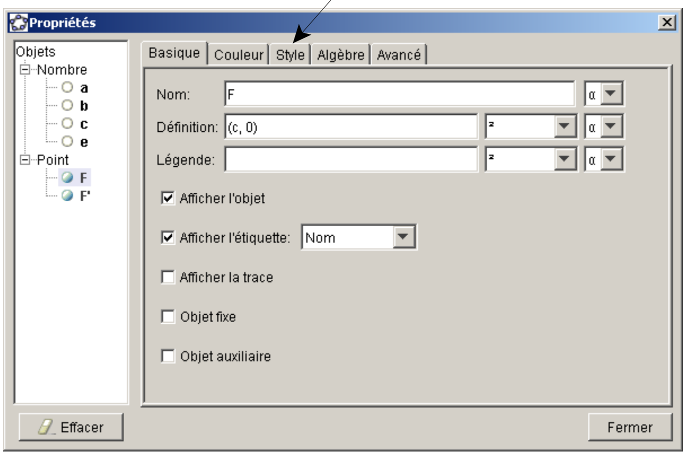
F=(c,0) et *F’=(-c,0)*

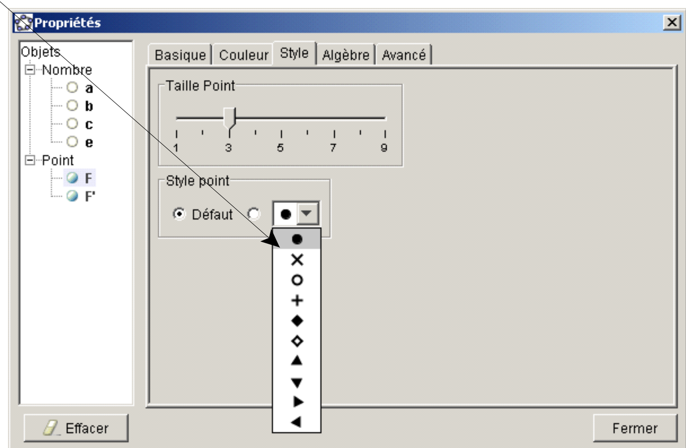
Changement du style des points :



Cliquez sur le *point F*, bouton droit de la souris, *Propriétés*
La fenêtre Propriétés s’ouvre.

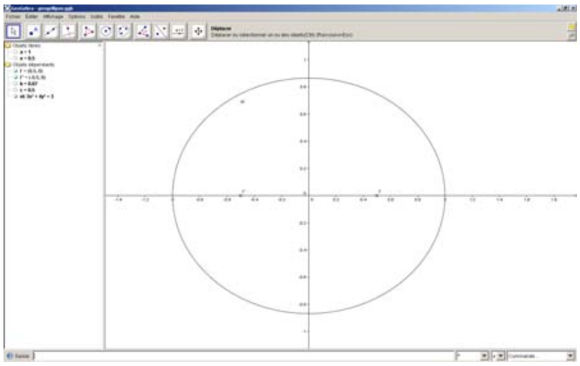
Choisir l’*Onglet Style*.
Dans le menu déroulant *Style* point choisir **x**





La fenêtre Propriétés permet de tout changer : nom de l’objet, position, affichage, couleur, taille, etc.

Tracé de l'ellipse



Syntaxe Geogebra :

Objet ellipse = Ellipse[Point F, Point F', demi-grand-axe]

A rentrer dans le Champ de saisie en bas :

el=ellipse[F,F',a]

Variations avec l'excentricité.

Changer l'excentricité :

Faire : e=0.7, 0.3, etc

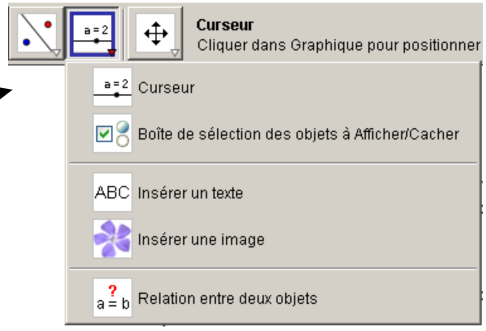
Changer le grand axe a :

Faire : a=0.8, 1.25, etc

Revenir à e=0.5 et a=1

On peut changer directement la valeur d'un objet libre en rentrant sa valeur dans la fenêtre algèbre en double-cliquant dessus et en faisant **Entrer** pour valider.

Variations sur l'ellipse



Variations continue de l'excentricité

Création d'un curseur

Sélectionner la commande Curseur :

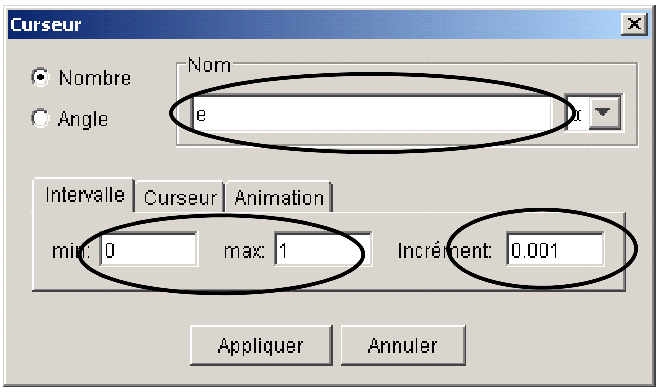
Dans la fenêtre graphique, cliquez à l'emplacement voulu pour le curseur, le fenêtre *Curseur apparaît.*

Remplir les cases :

Nom : *e2*

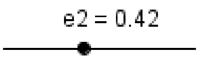
Intervalle : 0 et 1

Incrément : 0.001



Appuyer sur la touche ESC ou le bouton  pour sortir de la commande *Curseur*.

Avec la souris, en cliquant sur le point e2 et en tenant appuyé, faire varier sa valeur, puis mettre la valeur à 0.



Changer l'objet *c* pour le faire varier avec *e2*.

c=a*e2 b=sqrt(a²-c²) Ainsi que le texte d'affichage

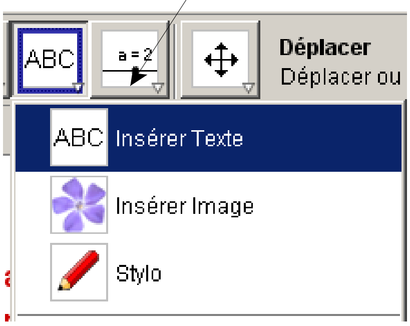
Faire varier la forme de l'ellipse au moyen du curseur et de la souris, puis mettre la valeur à 0.

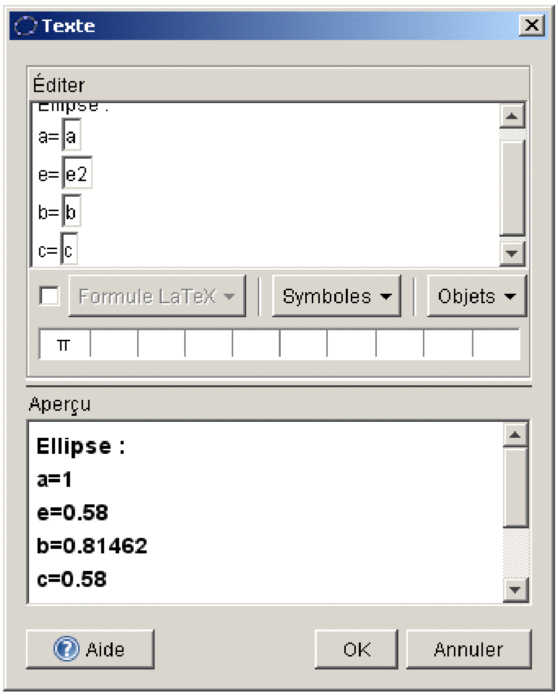
.

Affichage des données

.Insérer un texte pour afficher les valeurs de *a*, e2, *c*, *b*

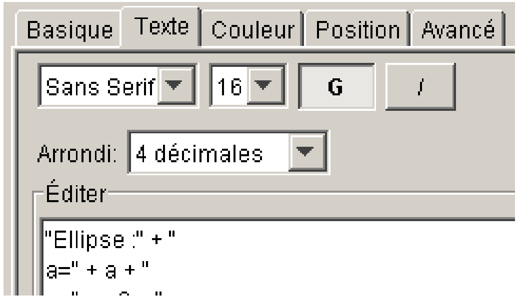
Choisir la commande *Texte*





Cliquer à l'endroit du texte à afficher

Ouverture d'une fenêtre *Texte*.

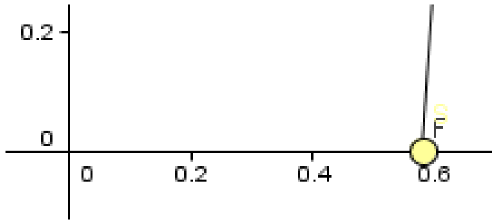


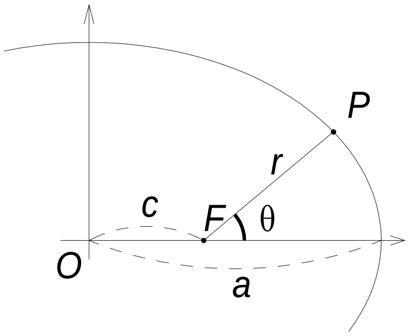
Dans l'onglet Texte des Propriétés mettre Taille 16, Arrondi 4 et en Gras.

5 - Un Soleil, une planète

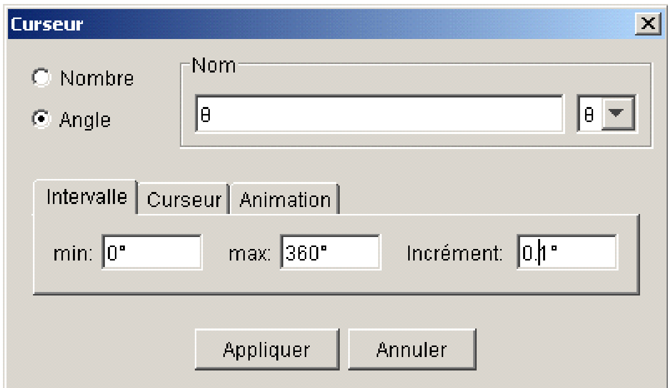
Soleil

Placer un point Soleil *S* en *F* : grandeur 7 et couleur jaune.





La position d'une planète sur son orbite est en général définie à partir du Soleil par le rayon vecteur du Soleil à la planète par l'angle θ.



Création du curseur θ.

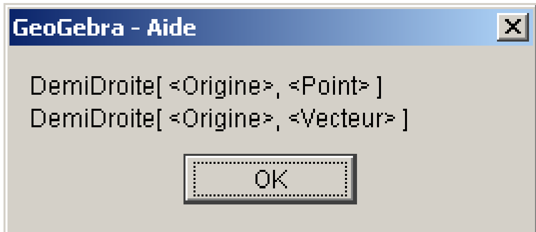
Cocher *Angle*
Nom : θ
Intervalle : 0 et 360°
Incrément : 0.01

Si nécessaire le replacer.

Appuyer sur la touche ESC ou le bouton  pour sortir de la commande *Curseur*.

Point *P*

Créer le point *P*.
Comment ? Intersection de la demi-droite *FP* avec l'ellipse.



Syntaxe de la Demi-droite :

Composante d'un vecteur unitaire de direction *FP* : cos θ et sin θ

Création de la demi-droite : *dd=DemiDroite[S,(cos(θ),sin(θ))]*

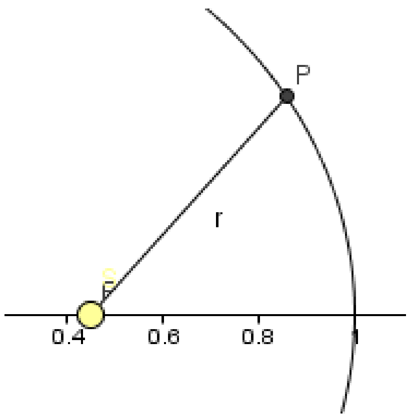
Et le point *P* : *P=Intersection[dd,el]*

On peut se passer de la demi-droite

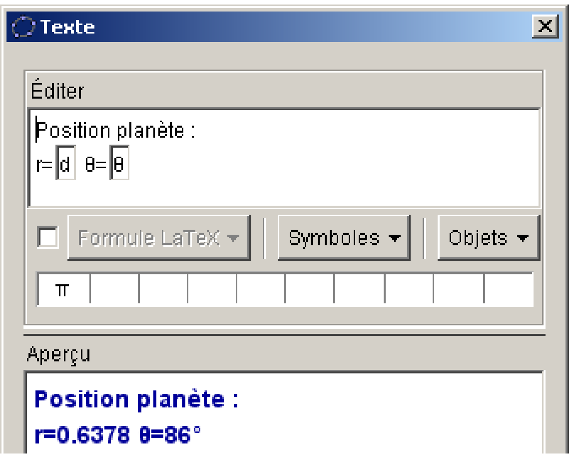
P=Intersection[DemiDroite[S,(cos(θ),sin(θ))],le]

Et créer le Segment *SP* :

r=Segment[S,P]

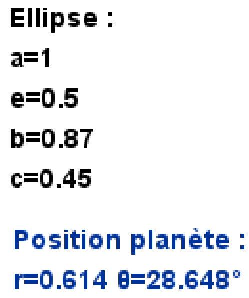


Distance Soleil-planète : *d = Distance[S, P]*



Affichage de la position de la planète : *r* (ou *d*) et *θ.*

Changer la couleur, la taille et le nombre de décimale (3).



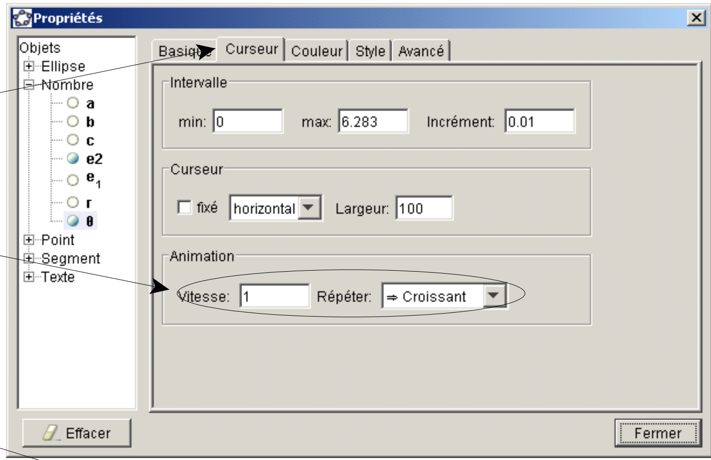
6 - Animation

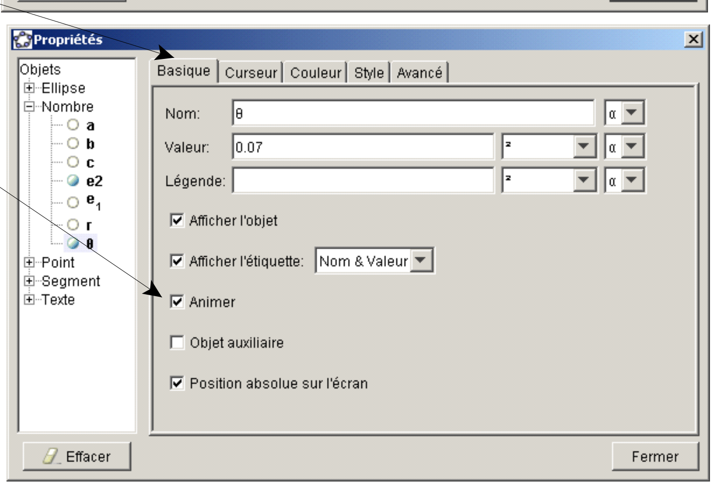
Mettre le curseur en mouvement :
Propriétés de θ
Onglet Curseur

Vitesse :1 et Répéter : Croissant

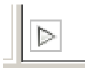
Onglet Basique

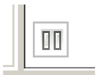
Cocher *Animer*





Dans la fenêtre graphique, en bas à gauche apparaît un bouton :


Pour démarrer


Pour arrêter

Attention : dans ce mouvement, l'angle θ varie linéairement.
La planète ne suit pas la loi des aires de Kepler ($2^{ème}$ loi).

On ne verra donc pas les vitesses variables entre le périhélie et l'aphélie comme le donne la $2^{ème}$ loi.

7 - Observation des orbites

Forme de l'ellipse

Pour une excentricité nulle : l'ellipse est un cercle : *a* = *b*, *F* et *F'* sont confondus
Pour quelle valeur de *e*, le rapport du grand et petit axe *b/a* vaut ? Valeur de *c* ?
Trouver dans ces cas les distances aux périhélies et aux aphélies.

b/a	*e*	*c*	Dist. périhélie	Dist. aphélie
50%				
90%				
99%				
99.1%				

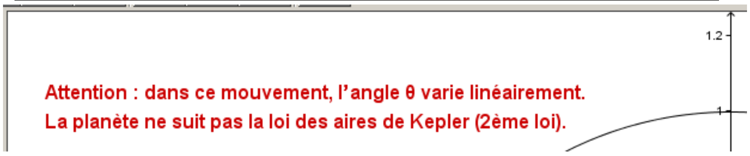
Calcul pour la Terre avec *e* =0.01672 :
le rapport *a*/*b* ? la longueur de *c* en km ?
Conclusion ?
Et aussi pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne… Pluton (voir tableau des planètes), les comètes

8 - Bouton ou boîte de sélection

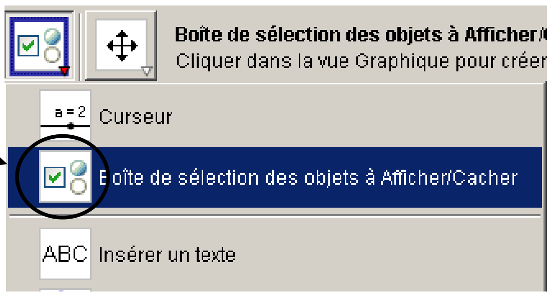
Faire afficher ou cacher un texte d'information :

Attention : dans ce mouvement, l'angle θ varie linéairement.
La planète ne suit pas la loi des aires de Kepler (2ème loi).

- Créer et placer le texte, en position absolue.



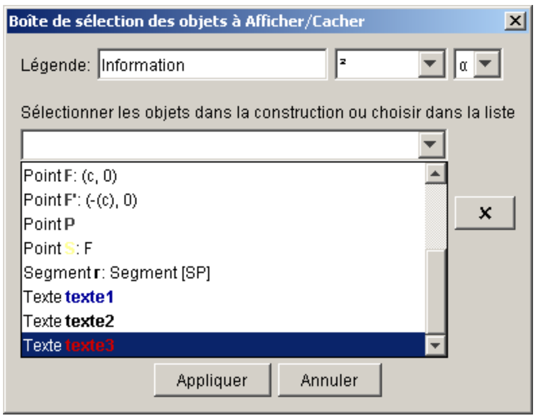
- Créer un bouton d'affichage : sélectionner

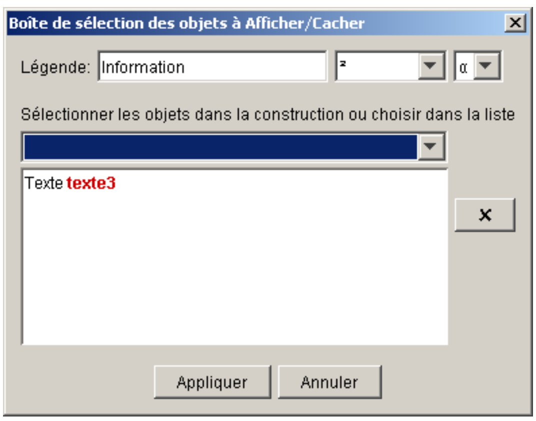


- En cliquant sur la position désirée, la fenêtre de *Boîte de sélection* s'ouvre :

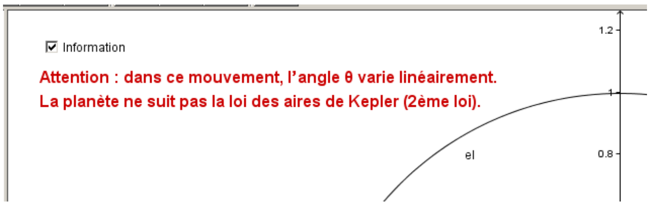
- Mettre la *Légende*

- Dans le menu déroulant choisir le ou les objets à affichage conditionnel





- Appliquer
- Changer les *Propriétés*
  Basique : Position absolue à l'écran
  Texte : Gras et 16
  Couleur bleu ou autre

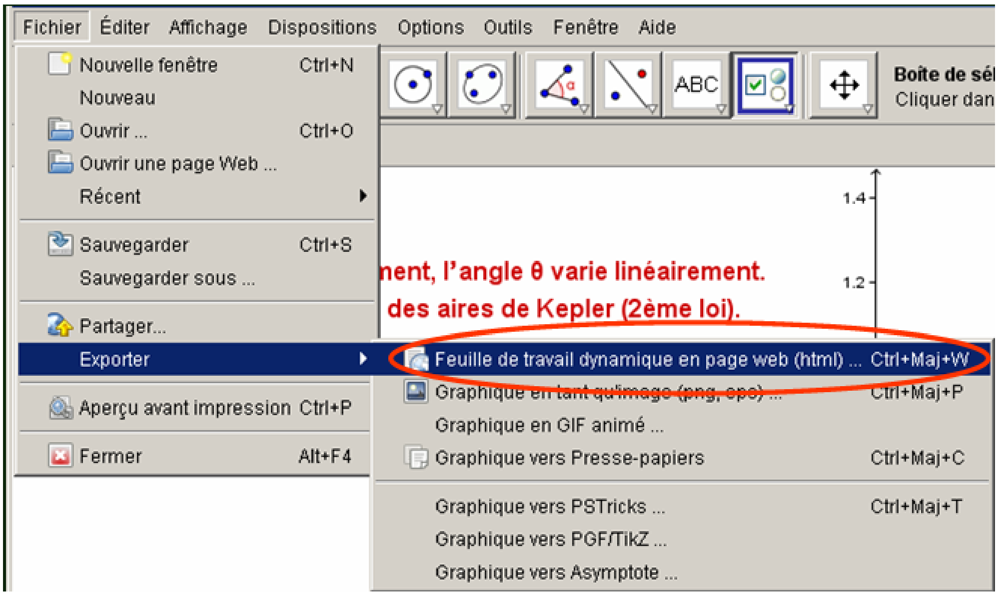


9 - Créer un fichier web du graphique animé

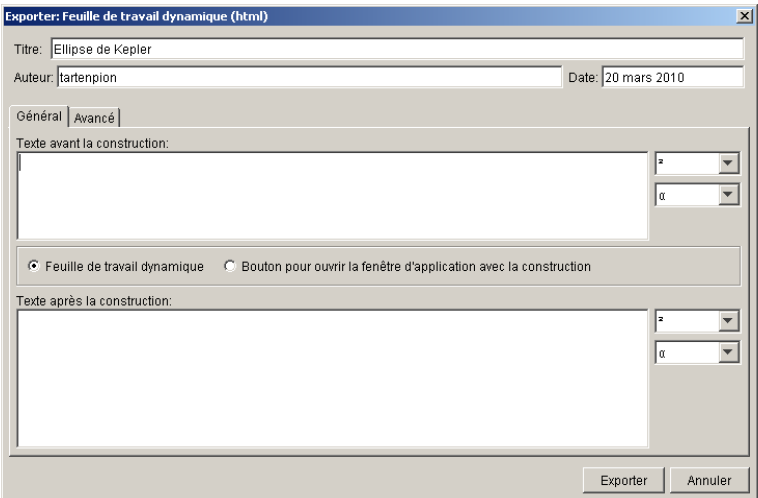
Sauvegarder sous la forme html :

Fichier/Exporter

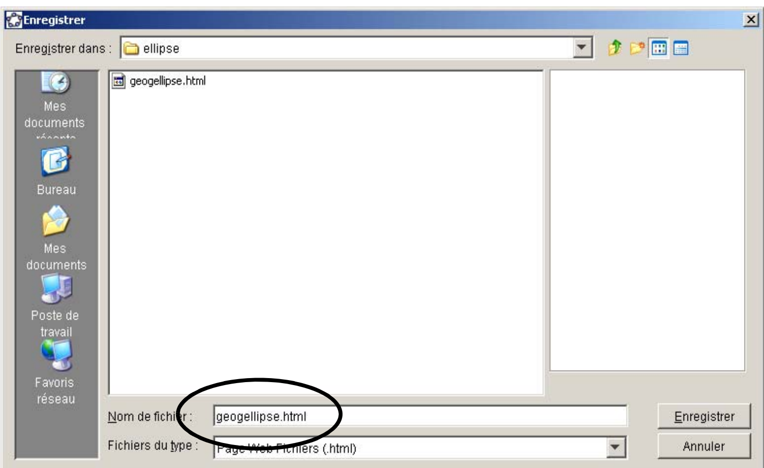
Choisir *Feuille de travail dynamique en page web.*



Une fenêtre s'ouvre :



Remplir selon ses humeurs



Choisir le répertoire et donner un nom (extension html ou htm).

Voilà, c'est fini !

Résultats

b/a	*e*	*c*	Dist. périhélie	Dist. aphélie
50%	0.866	0.866	0.134	1.866
90%	0.436	0.436	0.564	1.436
99%	0.141	0.141	0.859	1.141
99.1%	0.044	0.044	0.956	1.044

Pour la Terre : le rapport a/b = 0.99986 et c = 0.016 (2 500 000 km).

Si pour la plupart des planètes sauf les comètes, l'orbite peut être assimilée à un cercle, le Soleil ne peut être mis au centre de l'ellipse.