Gravitation
Galilée, Kepler, Newton
Observatoire de Lyon

Stage Dafop
Sylvie Thiault

11 et 12 décembre 2018

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Galilée.(1564-1642)

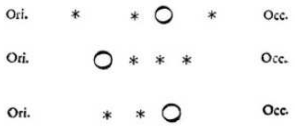
Il est né à Pise .

Il étudie la médecine et les mathématiques
Il est professeur de mathématique à l'université de Pise puis de Padoue en 1592.

Galilée met en oeuvre une démarche expérimentale rigoureuse.

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Galilée.(1564-1642)



1609 : découverte des satellites de Jupiter , avec la première lunette astronomique de l'histoire.

⇒ Il a l'intuition de la profonde unité du monde terrestre et céleste.

Etude du mouvement des corps à l'aide d'expériences avec des plans inclinés ⇒ notion de force et première formulation du principe d'inertie.

Ses grandes découvertes seront fondamentales pour la compréhension de la gravitation.

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Kepler.(1571-1630)

Il débute sa carrière comme assistant de Tycho Brahe.(1546-1601)
A la mort de Tycho, il “hérite” des observations de planètes accumulées pendant une vingtaine d’années .

Il s’intéresse en particulier au mouvement de Mars.

$\Rightarrow$ l’orbite de Mars est une ellipse.

Exit la perfection des orbites circulaires !

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

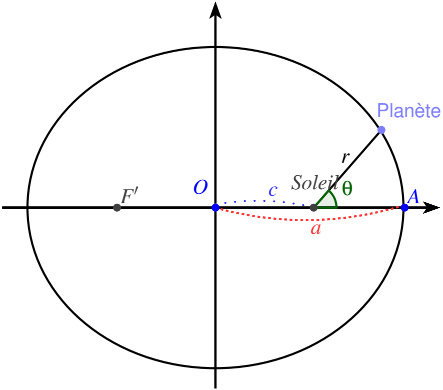
Les lois de Kepler

Etablies empiriquement par l'étude des relevés d'observation

Première loi :

Les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)}$$



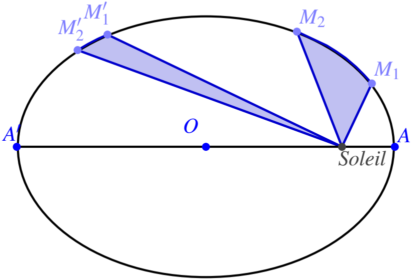
1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Kepler

Deuxième loi :

Le rayon Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

$$\frac{dS}{dt} = \text{constante.}$$



1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

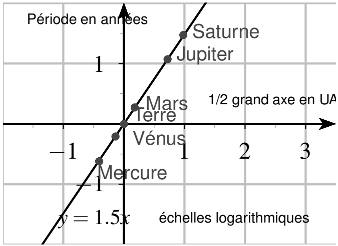
Les lois de Kepler

Troisième loi :

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

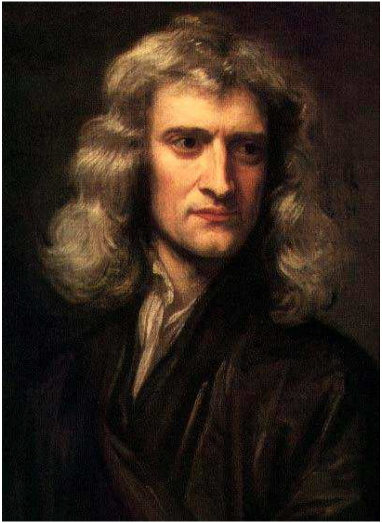
$$\frac{a^3}{T^2} = \text{cste}$$

Planète	a en ua	P en année
Mercure	0.387	0.241
Vénus	0.723	0.615
Terre	1	1
Mars	1.524	1.882
Jupiter	5.202	11.86
Saturne	9.555	29.46



1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Newton.(1642-1727)

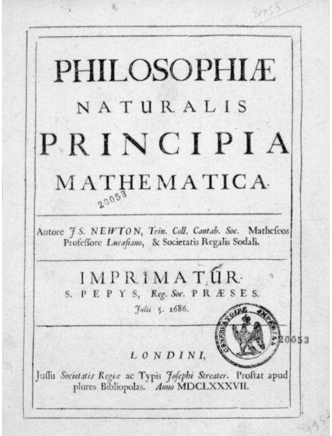


À dix-huit ans, il entre au Trinity College de Cambridge
Il s'intéresse à :

- l'arithmétique
- la géométrie dans les Éléments d'Euclide et la trigonométrie
- l'optique
- l'astronomie.
- et aussi... à l'alchimie et à la théologie

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Newton



1687 : Principes mathématiques de la philosophie naturelle :

- Publication en latin des “Philosophiae naturalis principia mathematica”
- Défendu par Voltaire dans ses Lettres Philosophiques (la 14ème)
- Traduit en français en 1756, par Emilie du Chatelet

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Newton

Première loi de Newton ou principe de l'inertie (initialement formulé par Galilée) :

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un solide soumis à un ensemble de forces dont la somme vectorielle est nulle est :

- soit au repos,
- soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (le vecteur vitesse demeure constant).

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Newton

Deuxième loi de Newton (ou théorème du centre d'inertie) :

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un objet ponctuel est égale au produit de la masse M de l'objet par son vecteur accélération **a**.

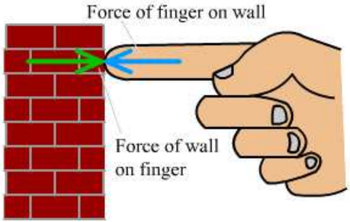
$$\Sigma \mathbf{F} = M\mathbf{a}$$

1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Newton

Troisième loi de Newton :

Lorsqu'un solide S_1 exerce une force sur un solide S_2, le solide S_2 exerce sur le solide S_1, la force directement opposée.

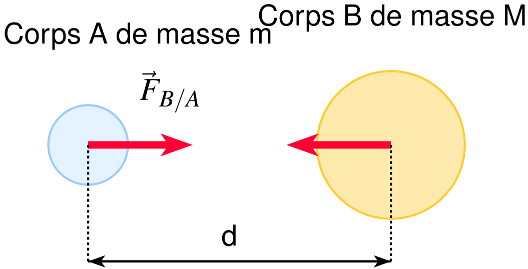


1. le trio décisif : Galilée, Kepler , Newton ...

Les lois de Newton

Loi de la gravitation universelle :

Deux corps quelconques s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de la distance de leurs centres de gravité.

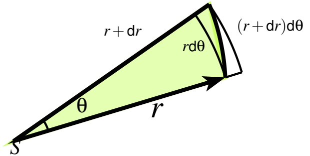


$$F_{B/A} = F_{A/B} = G\frac{Mm}{d^2}$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Deuxième loi de Kepler : la loi des aires

P est un corps céleste de masse m à la distance r d'un corps céleste S de masse M.
Il est soumis à une force d'attraction $\vec{F}$.



On a $r = f(\theta)$.

L'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant l'intervalle de temps dt est telle que :

$$\frac{1}{2} r \times r d\theta \leqslant dS \leqslant \frac{1}{2}(r+\mathrm{d}r) \times (r+\mathrm{d}r) d\theta.$$

D'où :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} (1)}.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

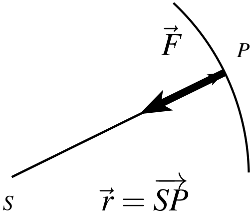
Deuxième loi de Kepler : la loi des aires

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ (variation de la quantité de mouvement).}$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ est le moment de la quantité de mouvement, autrement dit :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}.$$



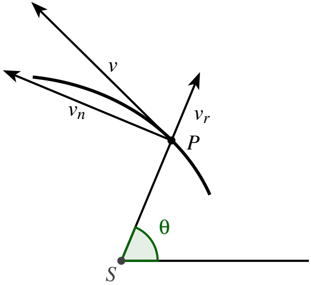
Comme $\vec{F}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires,on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}.$$

Le moment cinétique est constant.

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Deuxième loi de Kepler : la loi des aires



On a $\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_n}$.

$\vec{v_r}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires et $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v_n}$.
Mais $||\vec{v_n}|| = r\dfrac{d\theta}{dt}$, alors

$$\sigma = mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{constante.}(1')$$

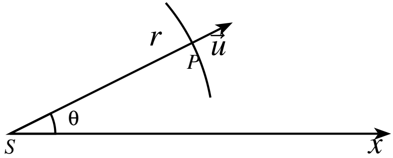
De (1) et (1'), on déduit :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma}{2m} = \text{constante.(2)}}$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

On considère un corps céleste P de masse m soumis à l'attraction d'un corps céleste S de masse M.



On note :

$SP = r$, $\vec{SP} = \vec{r}$ et $\vec{u} = \frac{1}{r}\vec{r}$.

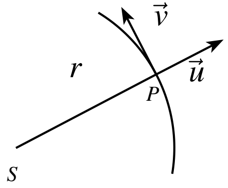
$\vec{SP} = \vec{r}$ varie constamment mais l'énergie totale de P reste constante.

On a : $E_{tot} = E_C + E_P$ avec :

l'énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, l'énergie potentielle :$E_P = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$.

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.



On pose $\vec{SP}(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
On considère le repère mobile $(P,\vec{u},\vec{v})$.
De $\vec{SP} = r\vec{u}$, on déduit par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{v}.$$

On a donc :$||\vec{v}||^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$

Et par conséquent :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

D'après la loi des aires : $\frac{dS}{dt}$ est une constante.

On en déduit que :

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{constante} = K \text{ ou encore : } \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{r^2}.$$

De :

$$E_{tot} == \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r},$$

on obtient :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

Effectuons un changement de variable...On a :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{r^2} \times \frac{dr}{d\theta}.$$

De

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

on déduit :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\frac{K^2}{r^2}\left(\frac{1}{r^2} \times \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 1\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

Effectuons un autre changement de variable en posant : $\frac{1}{r} = u$.

Différençions par rapport à θ :$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}$dont on déduit :

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}.$$

De :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\frac{K^2}{r^2}\left(\frac{1}{r^2}\times\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 1\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r},$$

on tire une autre expression de l'énergie totale en fonction de u :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mK^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - \mathcal{G}Mmu.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

L'énergie totale est constante, alors si on dérive

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mK^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - \mathcal{G}Mmu$$

par rapport à θ :

$$0 = \frac{1}{2}mK^2\left(2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right) - \mathcal{G}Mm\frac{du}{d\theta}$$

On simplifie et finalement :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathcal{G}\frac{M}{K^2}}$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

L' équation différentielle : $\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathcal{G}\dfrac{M}{K^2}\right)$, admet comme solution :

$$u = \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \mathcal{G}\frac{M}{K^2}.$$

On en déduit : $$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) + \mathcal{G}\dfrac{M}{K^2}}.$$

Avec : $\dfrac{1}{p} = \mathcal{G}\dfrac{M}{K^2}$, $e = Ap$:

$$\boxed{r = \frac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) + 1}.}$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler.

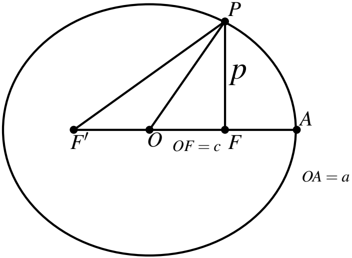
$$r = \frac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) + 1}.$$

est l'équation polaire d'une conique d'excentricité e,de paramètre p,où θ_0 est l'angle que fait le grand axe de la conique avec l'axe polaire à l'origine des temps.

- Si $e = 0$,la conique est un cercle.
- Si $0 < e < 1$,la conique est une ellipse.
- Si $e = 1$,la conique est une parabole.
- Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler : cas de l'ellipse



Prenons : $\theta_0 = 0$ et $r = \dfrac{p}{e\cos\theta + 1}$.

Avec $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = p = PF$.

Par définition de l'ellipse on a :

$PF + PF' = 2a$.

Avec $\widehat{PFF'} = 90^o$: $FF'^2 + PF^2 = PF'^2$.

$$\left\{\begin{array}{rl} p + PF' = & 2a \\ p^2 + (2c)^2 = & PF'^2 \\ & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} PF' = & 2a - p \\ c^2 = & a^2 - ap \\ & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} PF' = & 2a - p \\ p = & \dfrac{c^2}{a} - a \end{array}\right.$$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Première loi de Kepler : cas de l'ellipse

Mais $e = \dfrac{c}{a}$ et $c^2 = e^2a^2$, alors :

$p = \dfrac{c^2}{a} - a = a - ae^2 = a(1-e^2)$ et comme : $r = \dfrac{p}{e\cos\theta + 1}$,

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{e\cos\theta + 1}.}$$

- Périhélie pour $\theta = 0, \cos\theta = 1$ et $r = a(1-e)$
- Aphélie pour $\theta = 180^o$, $\cos\theta = -1$ et $r = a(1+e)$

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Troisième loi de Kepler

Pour une ellipse d'excentricité e et de paramètre p, le demi-grand axe a vérifie : $p = a(1-e^2)$.
Si b est le demi-petit axe, avec $c = ae$, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2(1-e^2).$$

Avec : $p = a(1-e^2)$, et $\dfrac{1}{p} = \mathcal{G}\dfrac{M}{K^2}$, on déduit :

$$K^2 = \mathcal{G}Mp \text{ et } K^2 = \mathcal{G}Ma(1-e^2).$$

D'après (2) $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{K}{2}$ et en intégrant : $S(t) = \dfrac{K}{2}t$.

2. Newton valide l'empirisme de Kepler

Troisième loi de Kepler

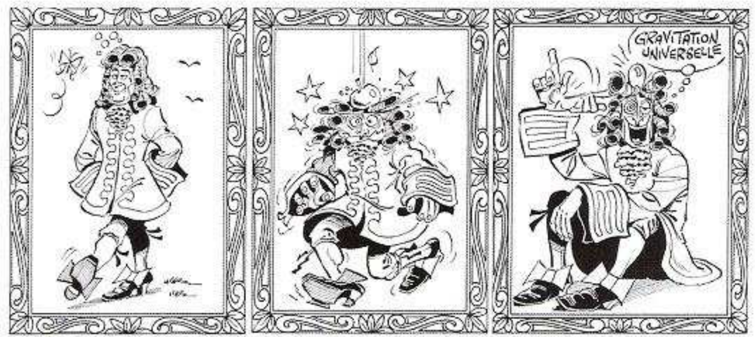
Sur une période P pour une ellipse de grand axe a et de petit axe b, on a : $S(P) = \pi ab = \frac{K}{2}P$ et (6) :$(\pi ab)^2 = \left(\frac{K}{2}P\right)^2$.

Et finalement, avec :$K^2 = \mathcal{G}Ma(1-e^2)$,

$$\pi a^2 \times a^2(1-e^2) = \frac{K^2}{4}P^2 \Leftrightarrow \frac{a^3}{P^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}.$$

$$\boxed{\frac{a^3}{P^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}.}$$

C'est fini.....



Rubrique à Brac © Gotlib – Dargaud