Astrogebra

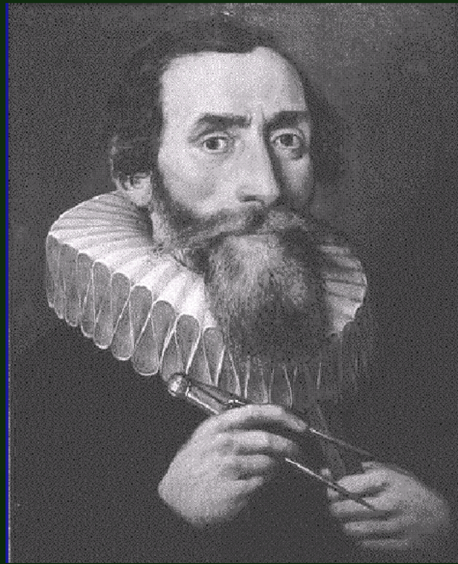
Initiation à Geogebra

avec

l'ellipse de Kepler

La construction de l'ellipse, orbite des planètes

Contexte historique



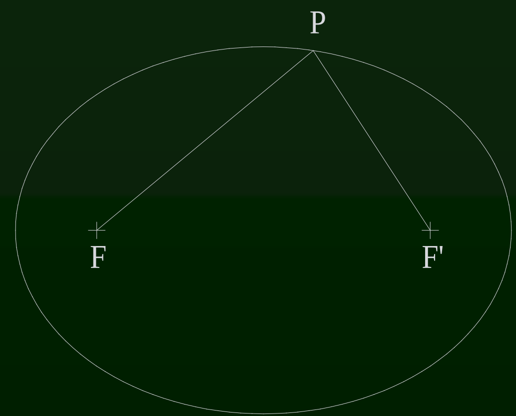
- L'héliocentrisme des astronomes éclairés de la fin du XVIème siècle conduit Kepler (1571-1630) à chercher dans l'ellipse la clé des orbites des planètes.

- La première loi de Kepler en est l'aboutissement.

- Chaque planète décrit dans le sens direct une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\theta} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- La définition géométrique est encore plus simple à mettre en œuvre :
Lieu géométrique d'un point dont la somme des distances à deux autres points appelés foyers est constante.

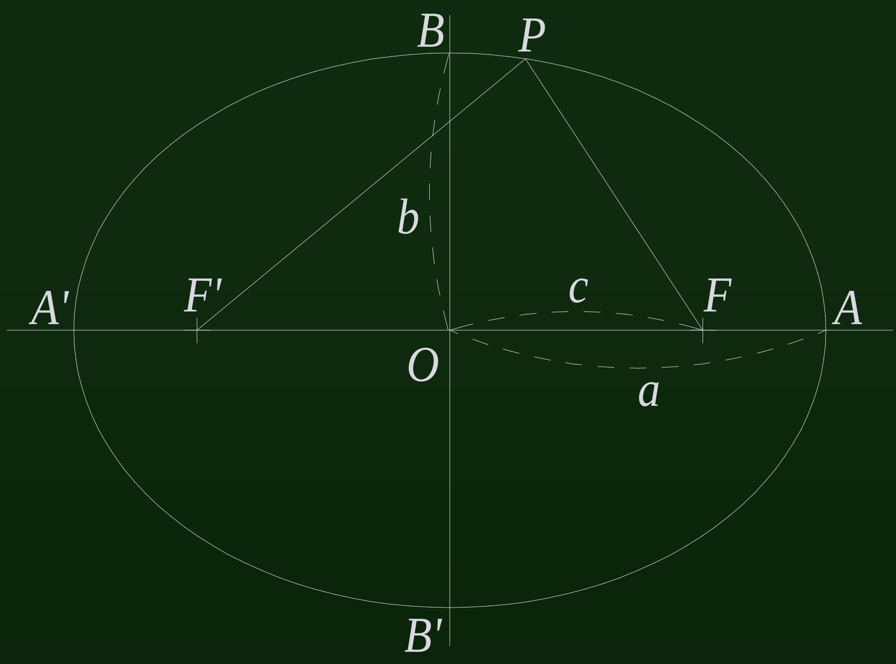


- Pour étudier la forme des orbites elliptiques des planètes nous allons utiliser Geogebra.
  - peu de formules mathématiques
  - visualisation immédiate
  - programmation intuitive

L'ellipse

- Paramètres d'une ellipse

  AA' grand axe
  BB' petit axe
  a demi-grand axe
  b demi-petit axe
  c distance centre – foyer
  e excentricité = *c* / *a*



$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

On prendra $a = 1$

Et pour paramètre de variation : excentricité *e*.

Les autres paramètres *b* et *c* en découlent.

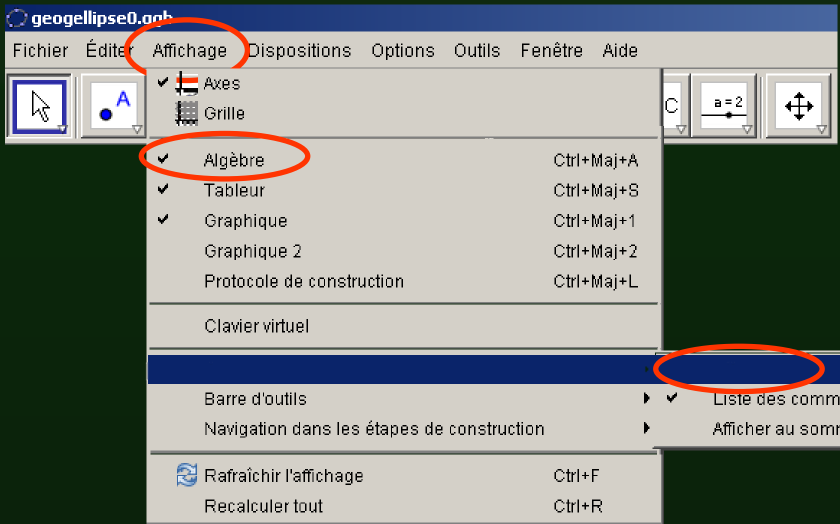
Pour se rattacher à l'Astronomie :

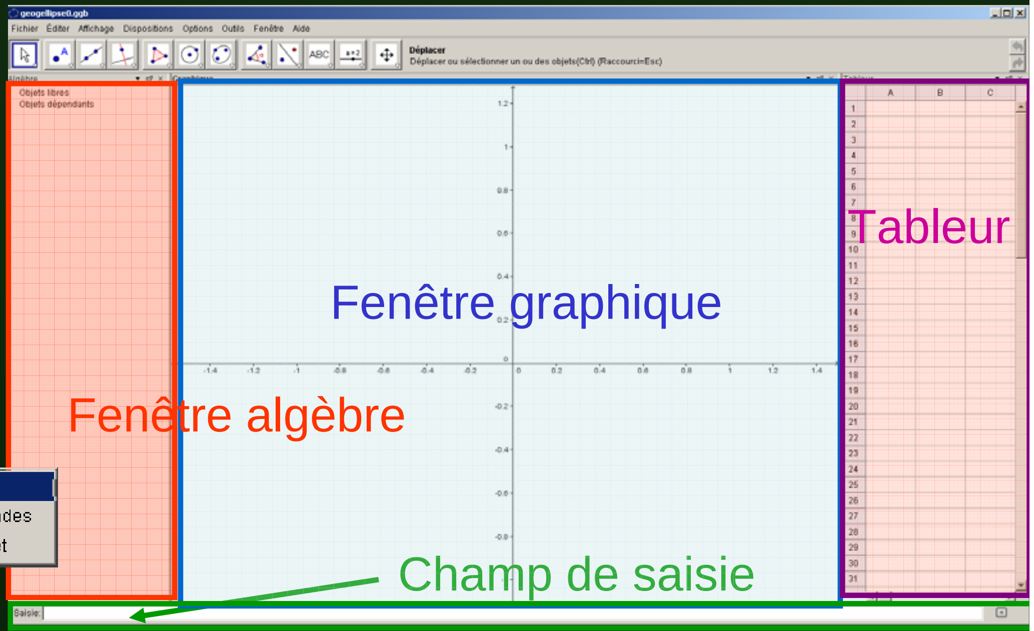
- au foyer *F* est le Soleil
- *P* est la planète sur son orbite elliptique
- *A* périhélie
- *A'* aphélie
- *e* l'aplatissement de l'orbite

L'ellipse sous Geogebra

- Lancer Geogebra

Si fenêtre algèbre non ouverte



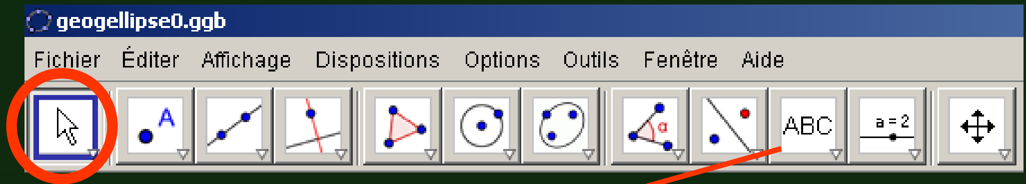


Cocher *Fenêtre Algèbre*

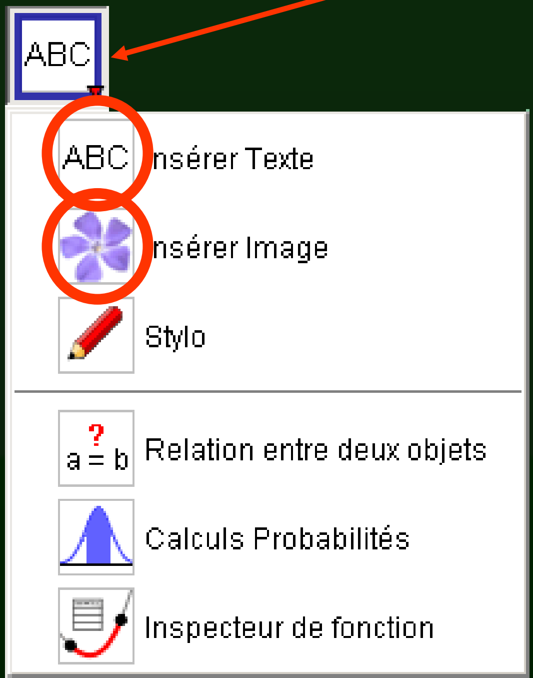
Idem pour *Champ de saisie*

Utiliser le fichier *geogellipse0.ggb*

Geogebra – premiers contacts



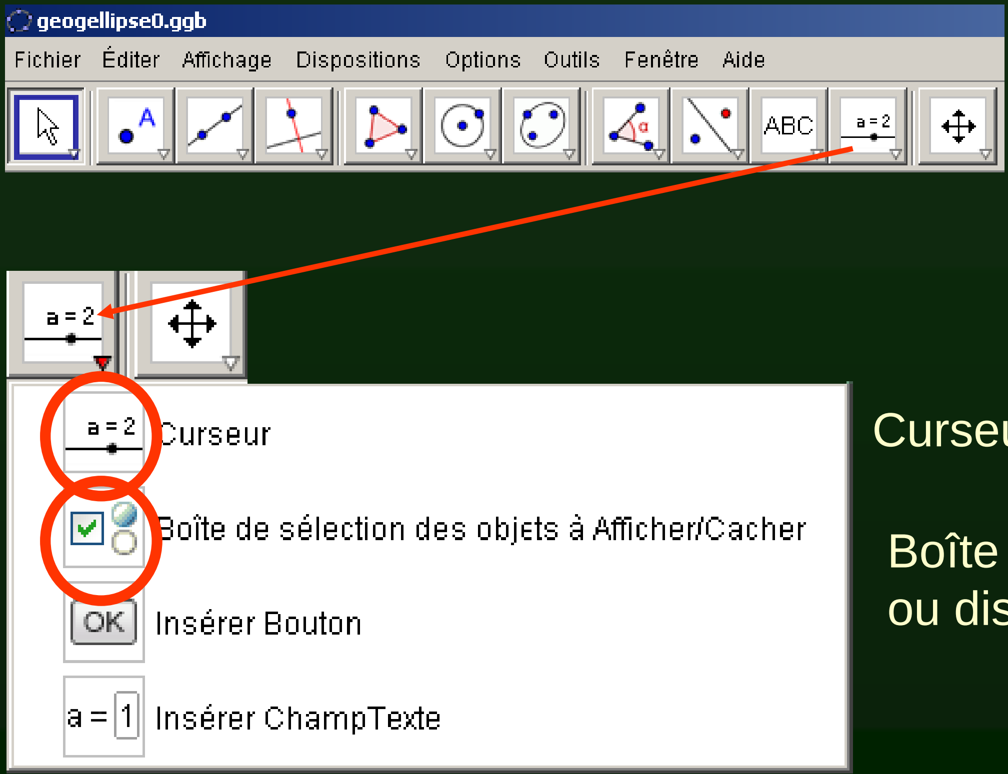
Sélection et déplacement d'un objet à la souris (en appuyant le bouton gauche).



Insérer un texte, afficher la valeur d'une variable...

Insérer une image

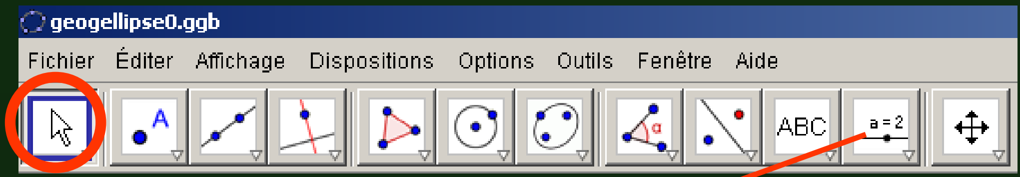
Geogebra – premiers contacts



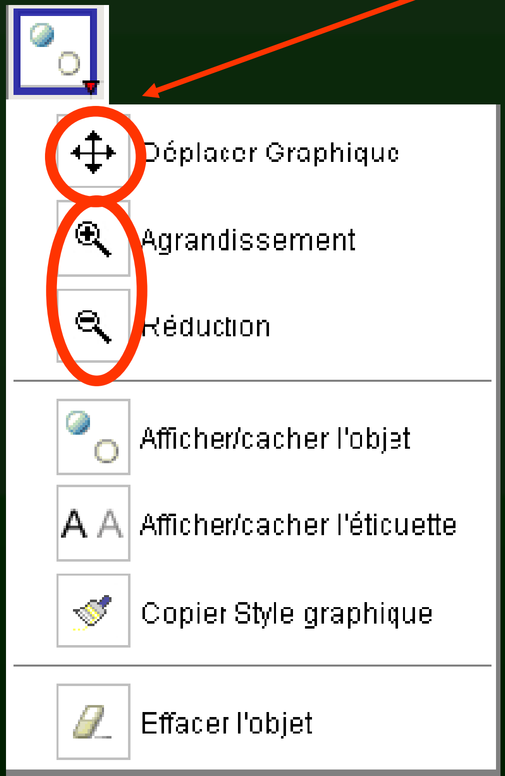
Curseur : permet de faire varier une valeur

Boîte d’affichage : pour faire apparaître ou disparaître un objet.

Geogebra – premiers contacts



Sélection et déplacement d'un objet à la souris (en appuyant le bouton gauche).

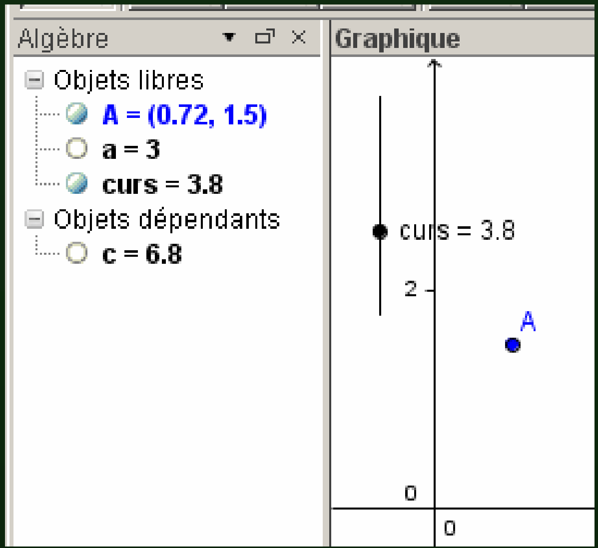


Déplacement de tout le champ dans la fenêtre graphique

ZOOM mais utiliser aussi la ***molette de la souris***

En zoomant +/-, le point sous le curseur de la souris est centre de zoom.

Geogebra – premiers contacts



Objets

Deux grandes classes d'objets :
- les objets libres, par ex. :données **a** point **A**, curseur curs

- les objets dépendants **c** qui vaut **a** + **curs**

Geogebra distingue les majuscules des minuscules.

Indices

L'écriture des indices se fait par :

Un seul caractère à l'indice : A_L donne A_L

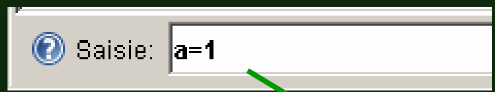
Plusieurs caractères à l'indice : A_{Sol} donne A_{Sol}

A_Sol donne $A_S$ol

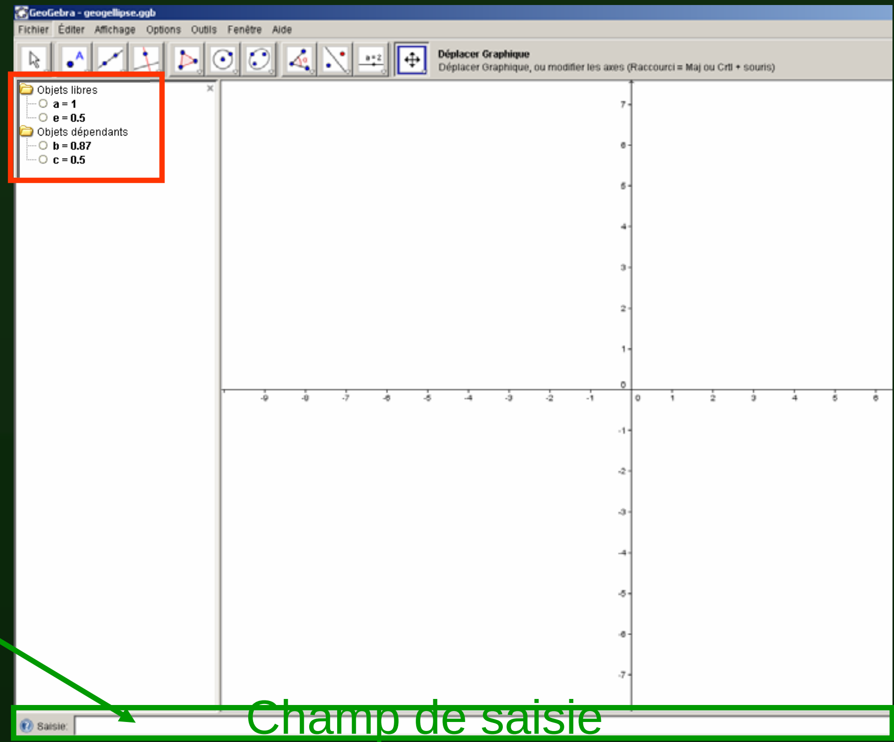
L'ellipse sous Geogebra

Création des paramètres de l'ellipse

Dans la fenêtre *Champ de saisie* écrire :

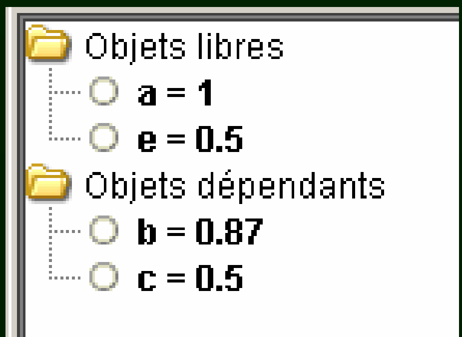


$a = 1$ Enter
$e = 0.5$ Enter
$c = a*e$ Enter
$b = sqrt(a*a-c*c)$ Enter



Ces données apparaissent dans la fenêtre algèbre :

Se servir des flèches ➡⬅⬆⬇ pour revenir à d'anciennes lignes et les transformer



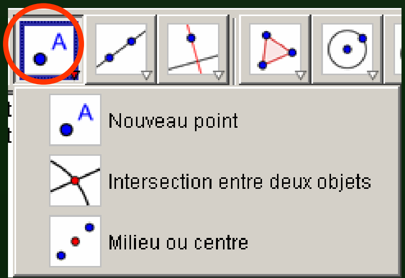
a et *e* dans la partie *Objets libres*
b et *c* dans la partie Objets dépendants car calculés à partir d'autres objets.

Construction de l'ellipse

Création des deux points foyers *F* et *F'*

Dans Geogebra, un point peut être créé soit

- directement dans la fenêtre graphique par le bouton commande



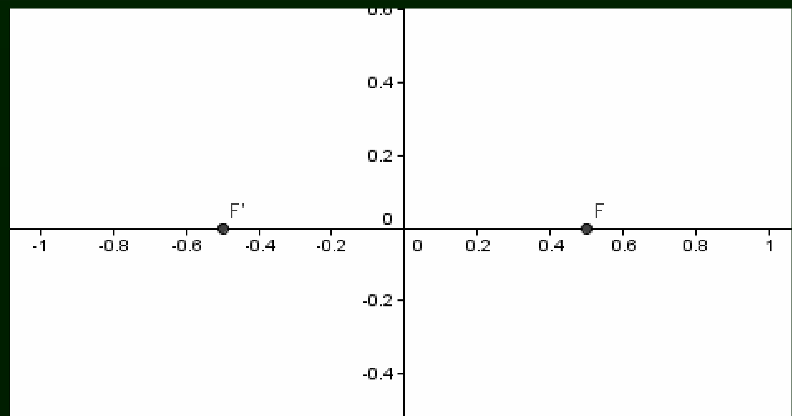
et en cliquant bouton gauche sur son emplacement

- en le créant dans la fenêtre de saisie par la syntaxe :

< Point = (abscisse,ordonnée) >

Pour les foyers

F=(c,0) et *F'=(-c,0)*



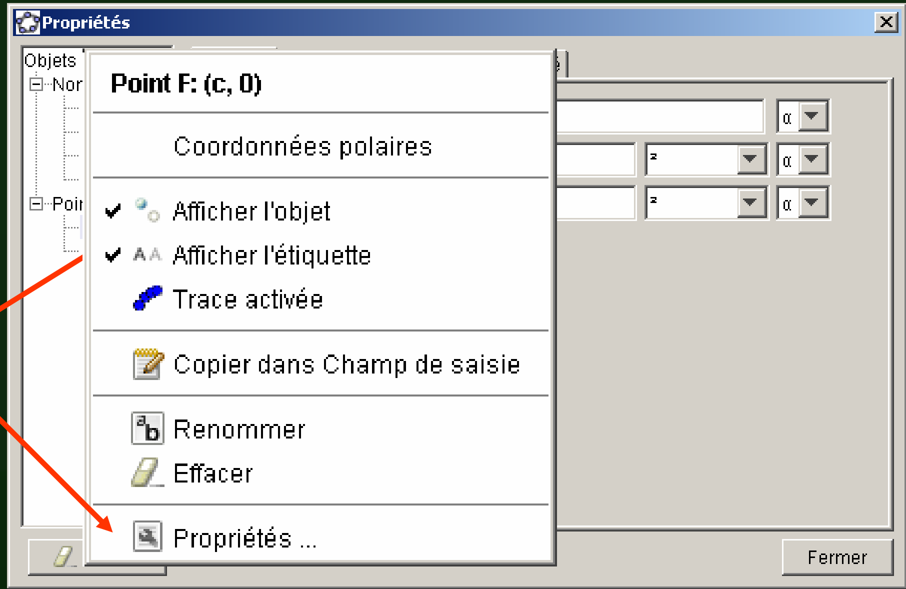
Construction de l'ellipse

Changement du style des points :

Cliquez sur le *point F*, bouton droit de la souris, *Propriétés*

La fenêtre *Propriétés* s'ouvre.

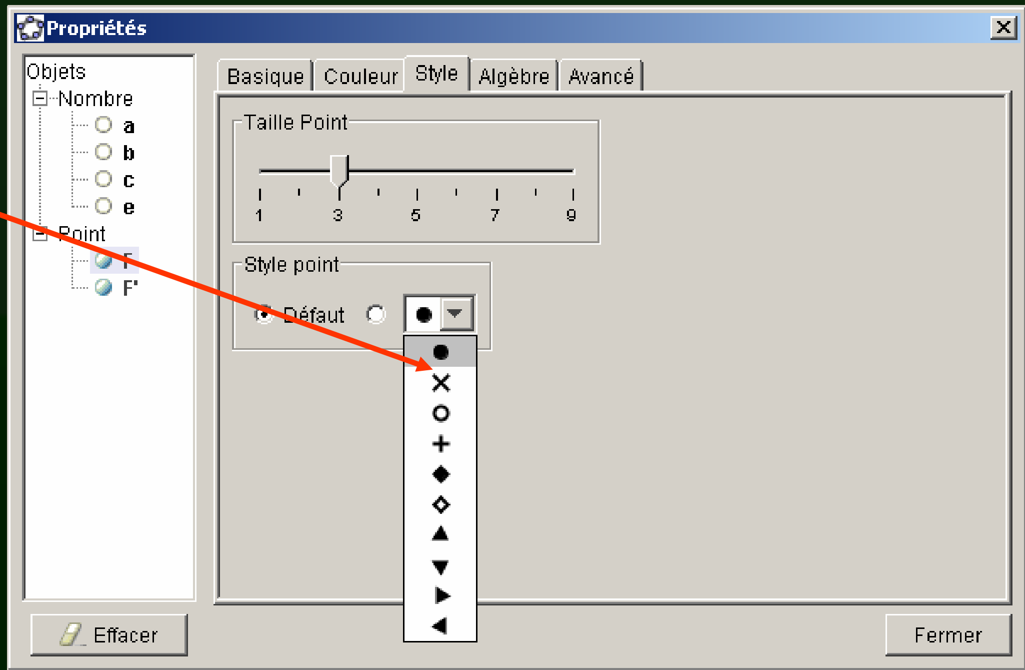
Choisir *l'Onglet Style*



Dans le menu déroulant *Style point* choisir x

La fenêtre *Propriétés* permet de tout changer :

- nom de l'objet
- position
- affichage
- couleur
- taille
- etc



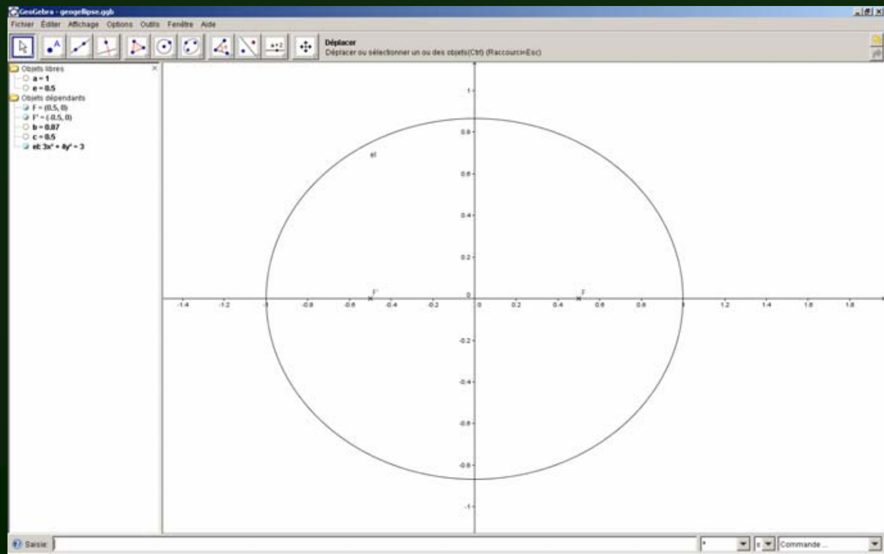
Construction de l’ellipse

Tracé de l’ellipse

Syntaxe Geogebra : *< Objet ellipse = Ellipse[Point F, Point F’, demi-grand-axe] >*

A rentrer dans le *Champ de saisie* en bas :

el=ellipse[F,F’,a]



Variations avec l’excentricité.

Changer l’excentricité :

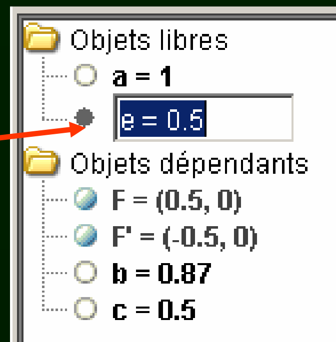
Faire : *e*=0.7, 0.3, etc

Changer le grand axe *a* :

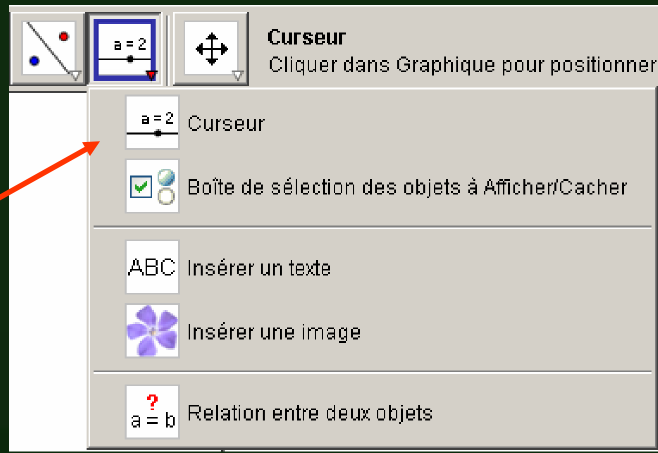
Faire : *a*=0.8, 1.25, etc

Revenir à *e*=0.5 et *a*=1

On peut changer directement la valeur d’un objet libre en rentrant sa valeur dans la fenêtre algèbre en double-cliquant dessus et en faisant Entrer pour valider .



Variations sur l'ellipse

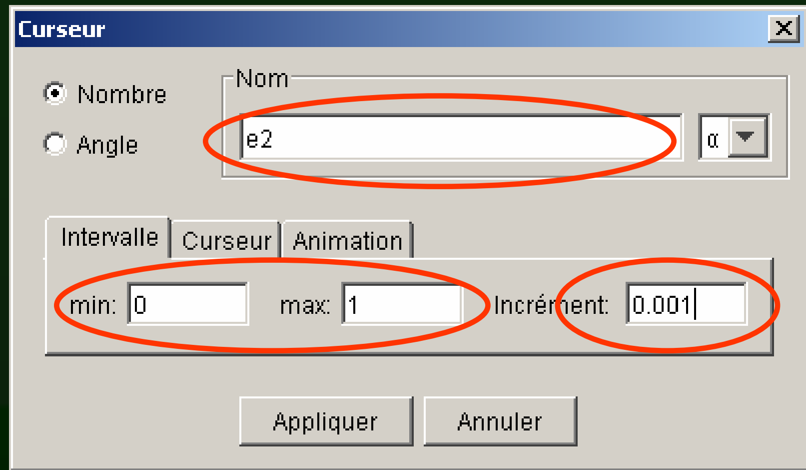


Variations continue de l'excentricité

Création d'un **curseur**

Sélectionner la commande *Curseur* :

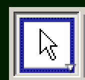
Dans la fenêtre graphique, cliquez à l'emplacement choisi pour le curseur



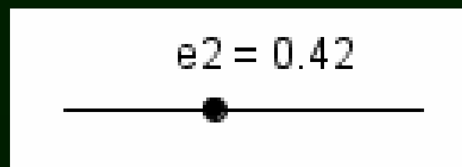
Une fenêtre *Curseur* s'ouvre

Remplir les cases

- Nom : *e2*
- Intervalle : 0 et 1
- Incrément : 0.001

Appuyer sur la touche ESC ou le bouton  pour sortir de la commande *Curseur*

Avec la souris, en cliquant sur le point *e2* et en tenant appuyé, faire varier sa valeur, puis mettre la valeur à 0.

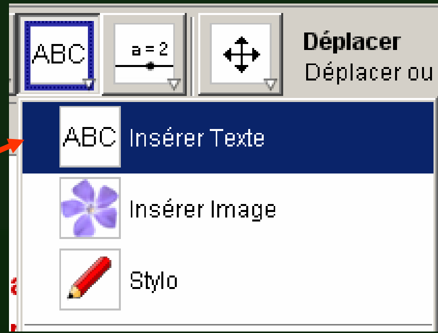


Variations sur l'ellipse

Recréer l'objet *c* pour le faire varier avec *e2*. Dans la *Fenêtre de saisie* :

*c = a*e2*

Faire varier la forme de l'ellipse avec le curseur.

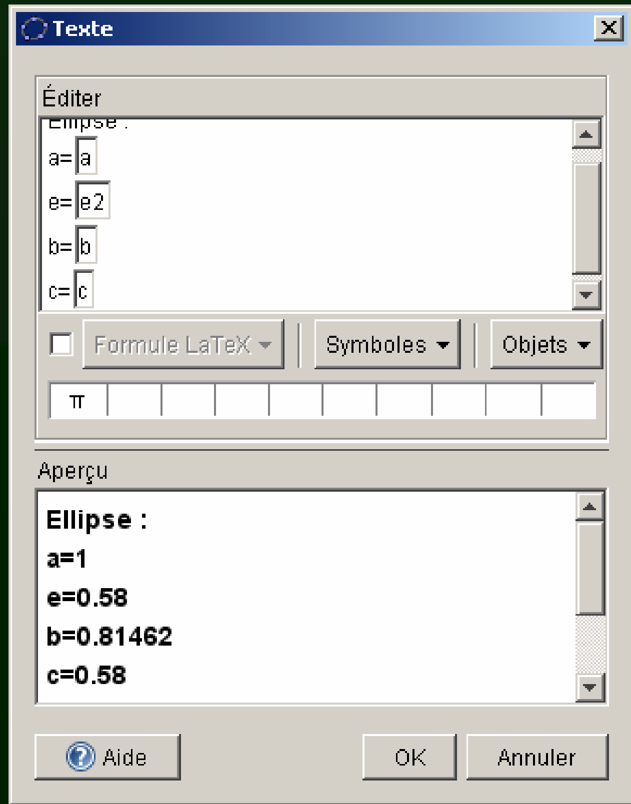


Affichage des données

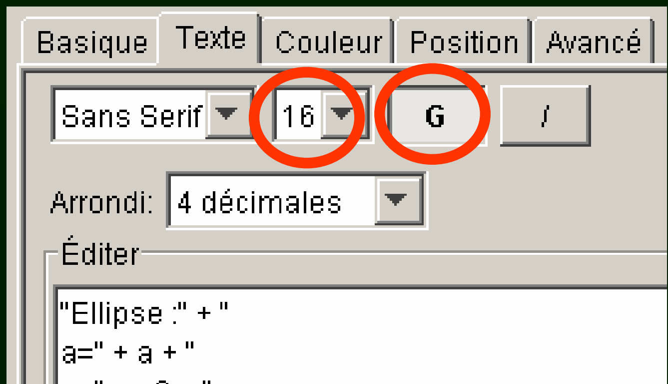
Insérer un texte avec les valeurs de *a*, *e2*, *c*, *b*.

Choisir la commande *Texte*

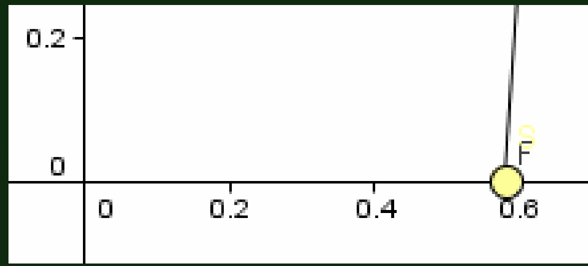
Cliquer à l'endroit du texte à afficher.
Rentrer le texte dans la fenêtre :



Dans l'onglet *Texte* des *Propriétés* mettre Taille 16, Arrondi 4 et en Gras.

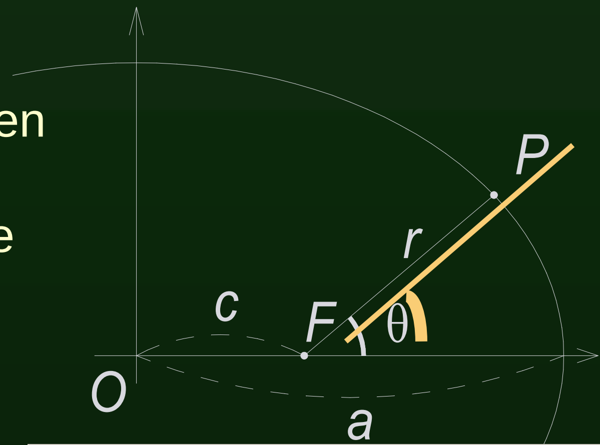


Un Soleil, une planète



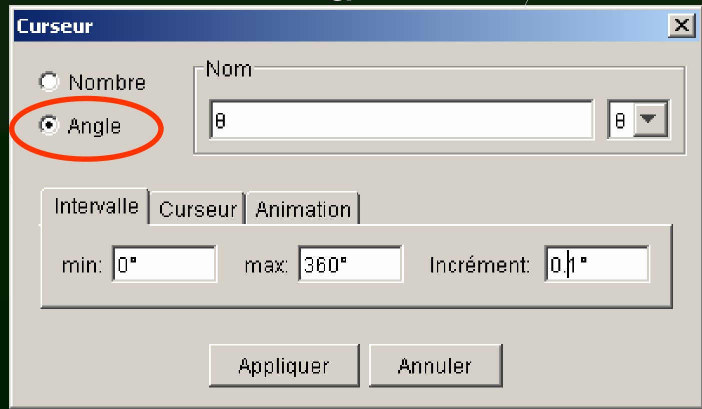
Placer un point Soleil *S* en *F* :
- grandeur 7 et couleur jaune

Planète

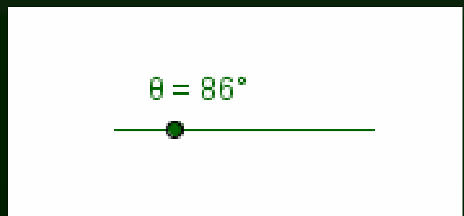


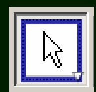
La position d'une planète sur son orbite est en général définie à partir du Soleil par
- le **rayon vecteur** du Soleil à la planète
- **l'angle** θ

Création du curseur θ.

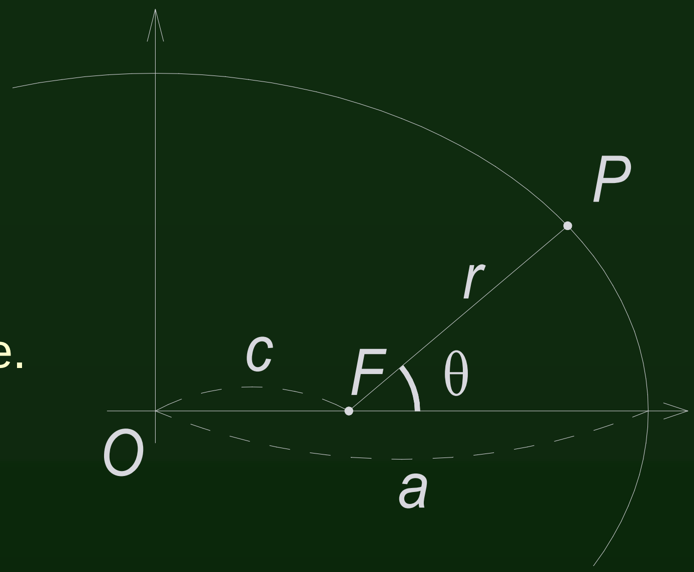


Cocher *Angle*
Nom : θ
Intervalle : 0 et 360
Incrément : 0.1



Appuyer sur la touche ESC ou le bouton  pour sortir de la commande *Curseur*

Un Soleil, une planète



Créer le point *P*

Comment ?

Intersection de la *demi-droite FP* avec l'ellipse.

Syntaxe de la Demi-droite

Composante d'un vecteur unitaire de direction *FP* : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

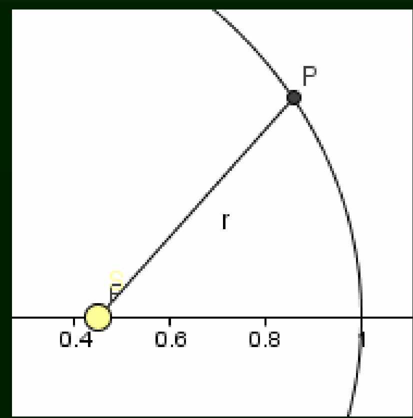
Création de la demi-droite : *dd=DemiDroite[S,Vecteur[(0,0),(cos(θ),sin(θ))]]*

Et le point *P* : *P=Intersection[dd,el]*

On peut se passer de la demi-droite *dd* :

P=Intersection[DemiDroite[S,(cos(θ),sin(θ))],el]

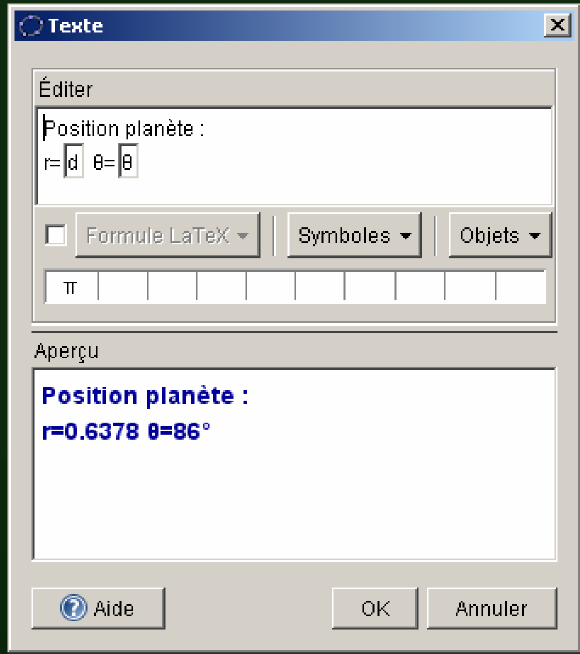
Et créer le Segment *SP* : *r = Segment[S,P]*



Un Soleil, une planète

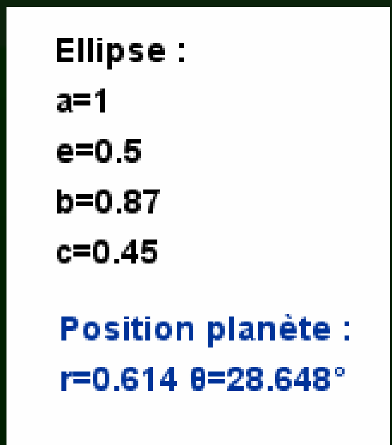
Distance Soleil-planète :

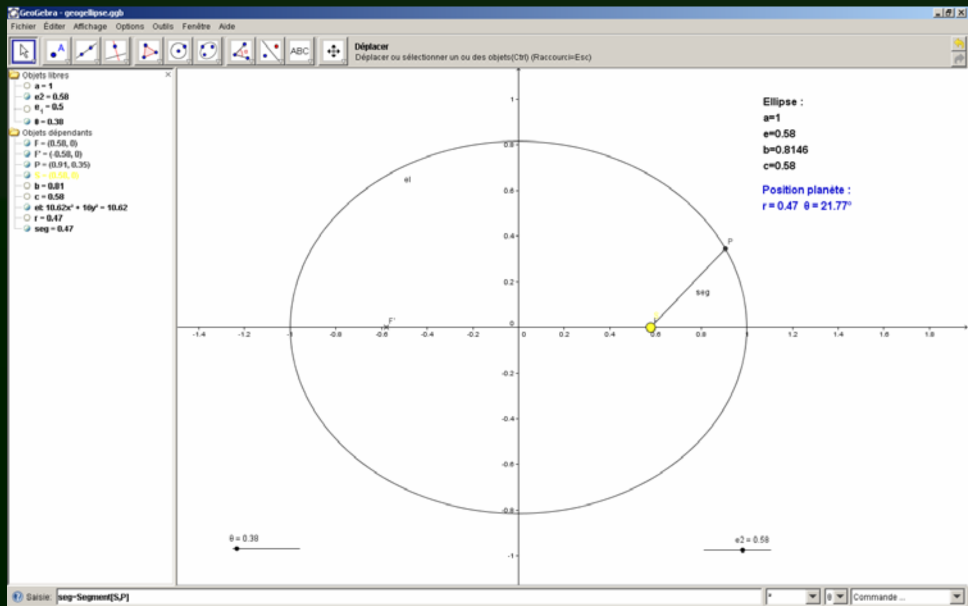
d = Distance[S, P]



Affichage de la position de la planète : *r* (ou d) et θ.

Changer la couleur, la taille et le nombre de décimale (3).





Animation

Mettre le curseur θ en mouvement :

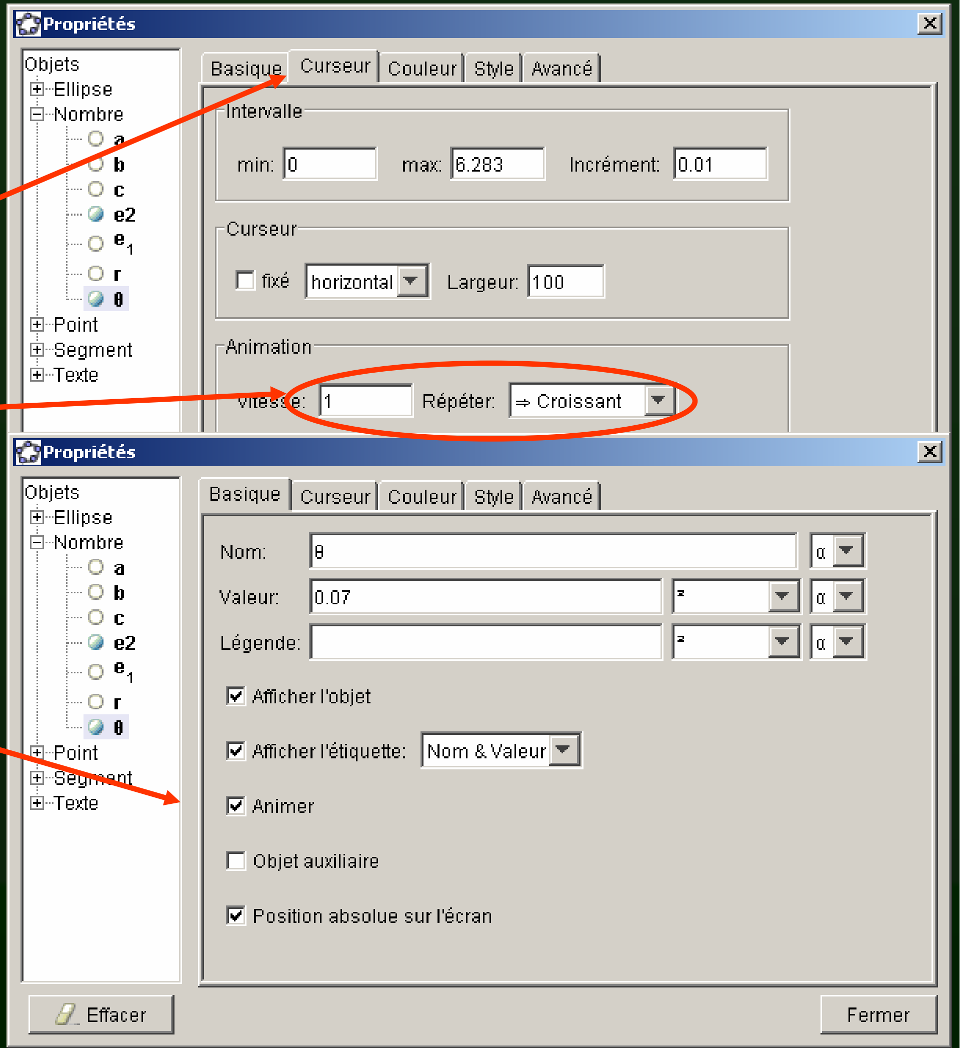
Propriétés de θ

1 - Onglet Curseur

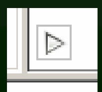
Vitesse 1 et Répéter : Croissant

2 - Onglet Basique

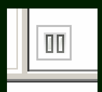
Cocher



Dans la fenêtre graphique, en bas à gauche apparaît un bouton :



Pour démarrer



Pour arrêter

Attention : dans ce mouvement, l'angle θ varie linéairement.
La planète ne suit pas la loi des aires de Kepler (2ème loi).

Observation des orbites

Forme de l'ellipse

Pour une excentricité nulle : l'ellipse est un cercle.

$a = b$ et F et F' sont confondus

Pour quelles valeurs de e, le rapport du grand et petit axe b/a vaut :

Trouver dans ces cas c, les distances aux périhélies et aux aphélies.

b/a	*e*	*c*	*Dist. périhélie*	*Dist. aphélie*
50%	0.866	0.866	0.134	1.866
90%	0.436	0.436	0.564	1.436
99%	0.141	0.141	0.859	1.141
99.9%	0.044	0.044	0.956	1.044

Rapport des axes pour la Terre e=0.01672 0.99986

Conclusion ?

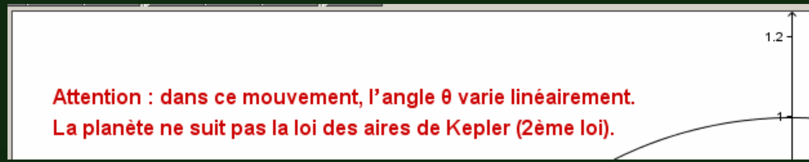
Pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne… Pluton, les comètes

Ou presque... Pour terminer un bouton d’affichage.

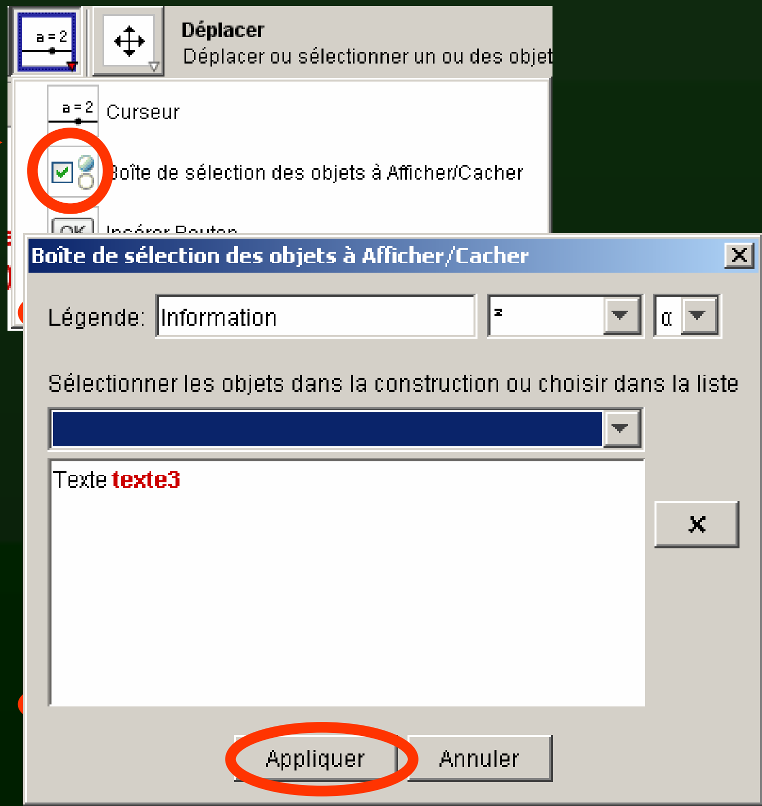
Faire afficher ou cacher un texte d'information.

Texte : **Attention : dans ce mouvement, l'angle θ varie linéairement.**
La planète ne suit pas la loi des aires de Kepler (2ème loi).

Créer et placer le texte, en position absolue, le mettre en rouge.



Créer un bouton d'affichage

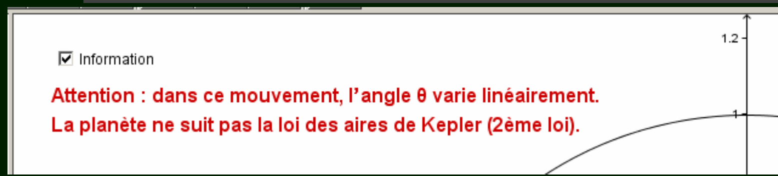


En cliquant sur la position désirée, la fenêtre de *Boîte de sélection* s'ouvre :

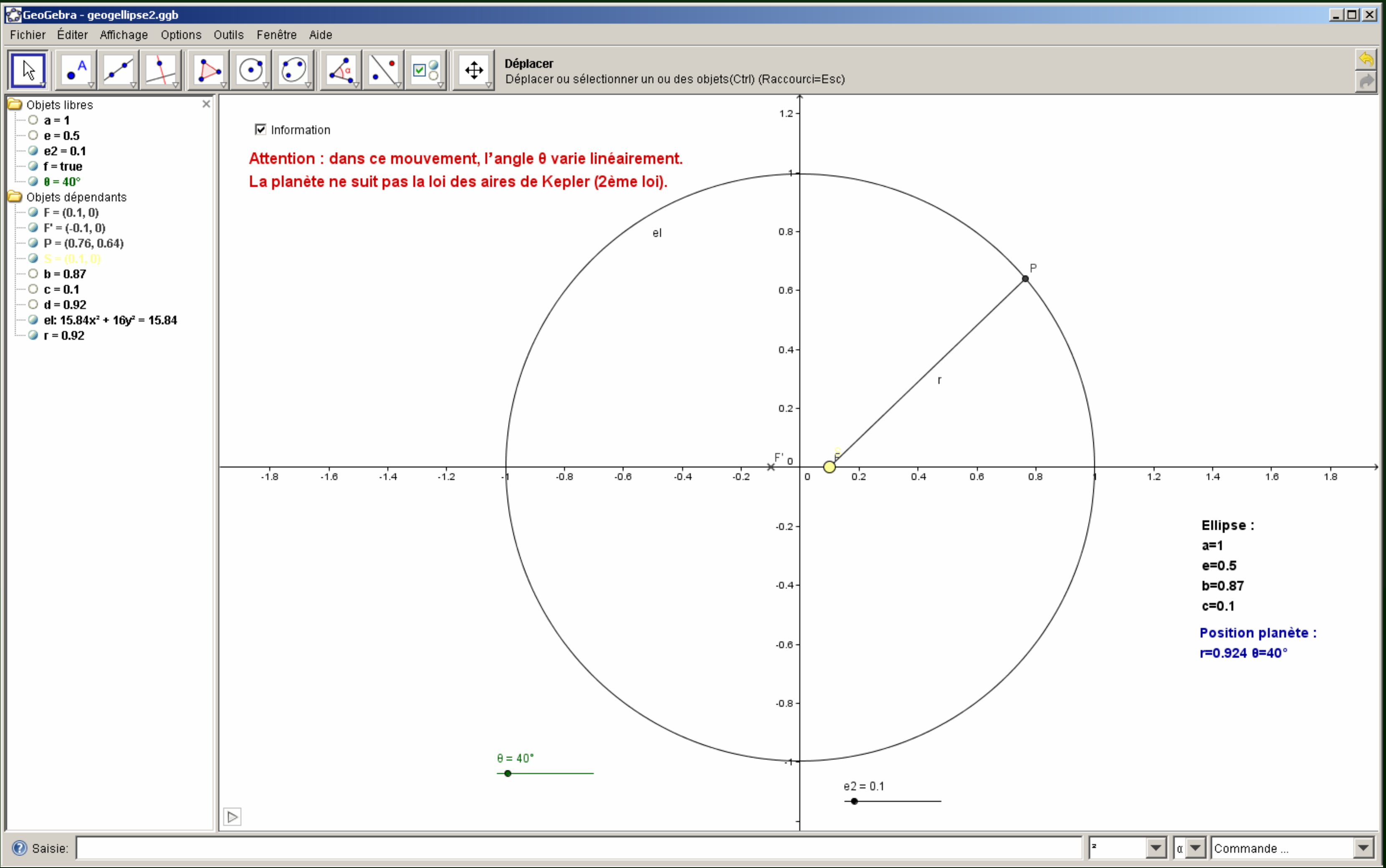
- Légende
- Dans le menu déroulant choisir le ou les objets à affichage conditionnel
- Appliquer

Propriété

- Basique : Position absolue à l'écran
- Texte : Gras et 16
- Couleur bleu ou autre



Aspect final :



Attention : dans ce mouvement, l’angle θ varie linéairement.
La planète ne suit pas la loi des aires de Kepler (2ème loi).

Et ensuite…

La rotation d’une planète est fonction du temps.

L’angle de position θ du rayon vecteur est assujetti au temps.

Alors que le temps dans notre environnement semble s’écouler linéairement, l’angle θ n’est pas lié linéairement au temps.

Il faut utiliser l’équation de Kepler :

$$u - e \sin u = M$$

Avec *u anomalie excentrique* et *M anomalie moyenne*.

Ceci est un peu plus compliqué, mais à faire dans le TD de la *Rétrogradation de Mars*.

. . . . . FIN