ESSAI

SUR

LA CONSTITUTION ET L'ORIGINE

DU

SYSTÈME SOLAIRE.

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier
(Section des Sciences, tom. VIII.)

Montpellier. — Typogr. Boehm et Fils.

ESSAI

SUR

LA CONSTITUTION ET L'ORIGINE

DU

SYSTÈME SOLAIRE

PAR

Édouard ROCHE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55

—

1873

ESSAI

SUR

LA CONSTITUTION ET L'ORIGINE

DU

SYSTÈME SOLAIRE.

Mes études sur la figure des corps célestes et sur la disposition des couches de niveau dans les atmosphères qui les entourent, m'ont conduit à quelques résultats applicables au Soleil, à son atmosphère, et à la condensation progressive par suite de laquelle se sont formées, comme on sait, les diverses planètes. Je me propose de réunir ici les conséquences de mes travaux antérieurs qui se rapportent à ces questions, et de montrer en quoi elles confirment, précisent ou modifient la théorie cosmogonique de Laplace. Divers problèmes intéressant le système solaire seront abordés dans ce Mémoire ; mais, vu la difficulté du sujet, le lecteur ne s'étonnera pas de ne trouver, sur bien des points, que de simples aperçus.

I.

DE LA CONDENSATION DE LA NÉBULEUSE SOLAIRE.

1. Concevons, avec Laplace, l'atmosphère du Soleil primitivement étendue, en vertu d'une excessive chaleur, jusqu'au delà des limites du monde planétaire, et se contractant peu à peu par l'effet de son refroidissement. Elle forme une sorte de nébuleuse tournant autour d'un axe de rotation, et

tend à se condenser, c'est-à-dire que ses diverses parties se rapprochent progressivement du centre. En vertu d'un principe de mécanique, la somme des aires décrites autour du centre de gravité du système par le rayon vecteur de chacune de ses molécules et projetées sur le plan de l'équateur solaire, reste toujours la même. Le mouvement de rotation de la nébuleuse doit donc s'accélérer d'une manière continue, à mesure que ses dimensions et son moment d'inertie par rapport à l'axe vont en diminuant.

2. L'atmosphère d'un corps qui tourne autour d'un axe ne peut pas s'étendre, dans le plan de son équateur, au-delà d'une certaine limite qui dépend de la vitesse de rotation. Tout point appartenant à l'atmosphère et participant à son mouvement est soumis à la fois à la force centrifuge due à la rotation et à l'attraction qu'exerce sur lui la masse tout entière. La *limite équatoriale* de l'atmosphère est la distance L où la force centrifuge égale la pesanteur. Si, par exemple, cette pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la nébuleuse, on a $\omega^2 L = \frac{M}{L^2}$, en appelant ω la vitesse angulaire de rotation et M la masse du système.

C'est ainsi que l'atmosphère solaire ne saurait actuellement dépasser l'orbite d'une planète fictive dont la révolution s'exécuterait en 25 jours et demi, durée de la rotation du Soleil ; cela correspond à la distance 0,17, le rayon moyen de l'orbe terrestre étant pris pour unité, ou à 37 rayons solaires.

Si, par une cause quelconque, l'atmosphère vient à dépasser la limite L déterminée comme on vient de le dire, les molécules situées au-delà cesseront d'appartenir à la nébuleuse ; elles continueront à se mouvoir indépendamment de l'atmosphère, obéissant à la fois à la vitesse qu'elles possèdent et à leur gravité. Nous allons voir que cette circonstance a pu se réaliser dans la nébuleuse solaire, sous l'influence de son refroidissement progressif.

3. La condensation ayant pour effet, comme on l'a dit, de diminuer le moment d'inertie $\Sigma r^2 dm$, et d'accroître la vitesse angulaire $\omega = \frac{K}{\Sigma r^2 dm}$, la limite équatoriale L diminue elle-même peu à peu. Supposons que, à une certaine époque, l'atmosphère s'étende jusqu'à cette limite : elle aura pris

une certaine figure de révolution autour de l'axe. A mesure qu'elle se contracte, ω augmente, et la limite L se resserre. Si L diminue plus rapidement que les dimensions effectives de l'atmosphère, la limite pénètre en quelque sorte à l'intérieur de l'atmosphère : tout ce qui se trouve au-delà de cette limite abandonne réellement le Soleil, et, s'en séparant sous la forme d'un anneau équatorial, continue à circuler autour du centre avec sa vitesse actuelle, parce que sa force centrifuge est exactement balancée par la pesanteur. On a donc :

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{M}{a^2},$$

a désignant le rayon de cet anneau, T la durée de sa révolution.

La matière de l'anneau continuant à se refroidir, il a dû s'y former divers centres de condensation, qui eux-mêmes ont pu se réunir autour du plus puissant d'entre eux, et s'agglomérer en une masse sphéroïdale de vapeurs, circulant autour du Soleil à peu près comme l'anneau primitif. Telle est, selon Laplace, l'origine d'une planète ; et l'on voit aisément pourquoi ces corps décrivent des orbes presque circulaires et peu inclinés les uns par rapport aux autres.

4. Les excentricités étant fort petites, le rayon que nous avons appelé *a* diffère peu du demi grand axe de l'orbite actuelle, et l'on reconnaît ainsi que la relation précédente, qui peut s'écrire

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = M,$$

n'est autre que la troisième loi de Képler entre les temps périodiques et les grands axes. Les éléments *a*, T étant invariables, comme on sait, sont aujourd'hui ce qu'ils étaient à l'origine ; d'où cet énoncé : Le temps de révolution d'une planète représente la durée de rotation du Soleil à l'époque où s'est formé l'anneau d'où dérive cette planète. La troisième loi de Képler peut donc s'interpréter comme établissant une relation entre la position initiale de chaque planète et la rotation correspondante du Soleil. Cet accord entre une loi fondamentale du système du monde et l'hypothèse de Laplace ne constitue pas une démonstration de cette hypothèse, mais c'est une condition à laquelle toute théorie cosmogonique doit satisfaire.

En effet, dans une nébuleuse incandescente, immense amas de substances diverses, et qui affecte à raison de sa rotation une forme très-aplatie, la condensation doit produire naturellement un partage de la masse en anneaux concentriques. Mais, pour que ces anneaux soient durables, pour qu'ils ne se détruisent pas immédiatement, il faut que leur distance au centre, loin d'être arbitraire, ait un rapport déterminé avec la rotation, rapport qui est exprimé par la formule ci-dessus.

C'est en vue de satisfaire à cette condition que Laplace attribue l'origine des planètes à des anneaux abandonnés aux limites successives que nous désignons par L. Ces anneaux ont subsisté, au moins durant un certain temps, parce que chacun des points matériels qui les formaient décrivait lui-même un cercle autour du centre. Si plus tard ils se sont condensés en planètes, ces planètes à leur tour ont dû continuer à décrire des orbites presque circulaires, ainsi qu'on le constate dans notre système. Mais nous verrons qu'il a pu se former des corps planétaires, satisfaisant à la condition qui précède, un peu autrement que ne le suppose Laplace, et en particulier au dedans de l'atmosphère ou de la nébuleuse.

5. Ce n'est que dans le plan de l'équateur que les choses se passent exactement comme il est dit au n° 3. Pour savoir quel est, en dehors de ce plan, l'effet d'un accroissement de la vitesse de rotation, je considérerai une surface que j'appelle *surface limite*, parce que l'atmosphère ne saurait la dépasser : c'est le lieu des points où, par suite de la force centrifuge, une molécule atmosphérique cesse de peser vers le centre.

Je supposerai dans ce qui va suivre, pour fixer les idées et pour plus de simplicité, que les forces qui sollicitent chaque point se réduisent à une attraction dirigée vers le centre de la nébuleuse et réciproque au carré de la distance ; cela aurait lieu rigoureusement si on pouvait ne considérer dans la nébuleuse qu'un noyau central et négliger les actions réciproques des particules atmosphériques. Moyennant ces simplifications, l'équation de la surface limite s'obtient en écrivant qu'au point m (*fig.* 1), la pesanteur $\frac{M}{r^2}$ est détruite par la composante de la force centrifuge suivant le rayon vecteur r.

La force centrifuge correspondante au parallèle dont la colatitude est θ, étant $\frac{4\pi^2 r \sin\theta}{T^2}$, on écrira $\frac{4\pi^2 r \sin^2\theta}{T^2} = \frac{M}{r^2}$; d'où résulte

$$\alpha r^3 \sin^2\theta = 1,$$

α désignant le rapport de la force centrifuge à la gravité, sous l'équateur et à une distance du centre égale à l'unité. Telle est, dans le plan XOY, la courbe génératrice de la surface limite, qui est de révolution autour de OX, axe des pôles.

6. Concevons maintenant cette courbe construite pour deux valeurs de la constante α répondant à deux époques consécutives du refroidissement. A chacune des limites équatoriales OA, OA′ (*fig.* 2), correspondent des figures d'équilibre AB, A′B′ de l'atmosphère. La matière comprise entre AL et A′L′ devra se séparer immédiatement du Soleil, et cesser de faire corps avec l'atmosphère, comme il a été expliqué au n° 5. Pour que le volume restant prenne la figure du sphéroïde intérieur A′B′, une autre portion de matière devra cesser d'appartenir au Soleil, ce qu'elle fera en se déversant de B′ en A′ vers l'équateur, et c'est là qu'elle sera à son tour abandonnée.

Comment s'opère ce transport du fluide excédant des pôles à l'équateur? Cela résulte de la forme qu'affectent les surfaces de niveau dans l'atmosphère, et particulièrement de la figure de sa *surface libre*. Ici s'applique l'étude que j'ai faite, en 1851, de la théorie des atmosphères, et que j'ai développée dans mon *Mémoire* de 1854 *sur la figure des atmosphères des corps célestes* [1].

7. Le caractère d'une atmosphère est que chacune de ses molécules pèse vers l'astre qu'elle enveloppe. Si l'on néglige l'attraction du fluide sur lui-même, la surface extérieure devra être en tous ses points perpendiculaire à la résultante des deux seules forces qui sollicitent une molécule, l'action du corps central et la force centrifuge résultant du mouvement de rotation du système. En partant de là, on obtient aisément l'équation géné-

---

[1] Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. *Procès-verbaux de la section des Sciences*, séance du 10 février 1851.— *Mémoires de la section des Sciences*, tom. II, p. 399, année 1854. Voyez aussi le *Traité élémentaire de Mécanique céleste* de M. Résal, qui a bien voulu, dans son chap. VI, résumer mes Recherches sur les atmosphères des corps célestes.

rale de l'équilibre d'une atmosphère ainsi définie. Ce qui est vrai de cette atmosphère fictive, nous le considérerons, par extension, comme applicable approximativement à la nébuleuse solaire.

Les surfaces de niveau y sont de révolution autour de l'axe de rotation, et l'équation de la courbe génératrice est

$$\frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2 \theta = \text{const.};$$

r et θ désignant (*fig.* 1) les coordonnées polaires d'un point, α est toujours le rapport de la force centrifuge à la pesanteur solaire, pour une distance du centre égale à l'unité (*Méc. cél.*, l. III, n° 47).

Appelant R, R′ le rayon polaire et le rayon équatorial d'une surface de niveau quelconque, on trouve que

$$\frac{R' - R}{R} = \frac{\alpha R'^3}{2}.$$

Les couches de niveau sont donc aplaties aux pôles, et cet aplatissement va en croissant avec la distance au centre.

L'atmosphère se termine nécessairement à la plus grande des surfaces de niveau qui enveloppe le noyau, sans sortir de la surface limite définie au n° 5. Cette dernière surface fermée est ce que je nomme la *surface libre*. L'équation de la surface limite étant

$$\alpha r^3 \sin^2 \theta = 1,$$

celle de la surface libre est

$$\frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2 \theta = 3\alpha^{\frac{1}{3}};$$

et ses axes principaux sont

$$R' = \alpha^{-\frac{1}{3}}, \qquad R = \frac{2}{3} R'.$$

La valeur actuelle de $\alpha = \frac{1}{R'^3}$ est 203, parce que la limite atmosphérique équatoriale est $R' = 0,17$, en prenant pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil.

8. Voici maintenant une propriété géométrique que j'ai reconnue à la sur-

face libre, et qui est un point capital de cette théorie [1]. La courbe génératrice (*fig.* 3) possède à l'équateur un point double A, où les deux tangentes font entre elles un angle de 120°. En tournant autour de OX, cette courbe engendre une surface qui offre elle-même une arête saillante tout le long de l'équateur : c'est la ligne de jonction de la partie fermée de la surface libre avec ses deux nappes illimitées.

Au-delà de cette surface, la surface de niveau qui vient immédiatement n'enveloppe pas de toute part les précédentes : elle s'ouvre à l'équateur, tangentiellement à ce plan, puis se développe en deux nappes infinies.

Ceci établi, lorsque, par l'effet du refroidissement de la nébuleuse, la vitesse de rotation s'accroît, le rapport α de la force centrifuge à la pesanteur augmente, la limite $OA = R'$ diminue, et la surface libre de l'atmosphère se contracte, pour ainsi dire, en restant semblable à elle-même. Par suite de cette contraction, la couche fluide qui se trouve en dehors descend des pôles vers l'équateur, en coulant le long des surfaces de niveau, et s'échappe par l'arête saillante que nous avons signalée, comme par une ouverture. Elle forme ainsi une sorte de zone équatoriale qui, dès ce moment, ne fait plus partie de l'atmosphère du Soleil.

C'est là précisément le fait que Laplace, dans la célèbre Note de l'*Exposition du système du monde*, a pris pour fondement de son hypothèse sur la formation des planètes et des satellites. Nous le retrouvons ici comme une conséquence de notre théorie géométrique des atmosphères. L'abandon successif des zones équatoriales résulte du refroidissement de la nébuleuse solaire combiné avec la forme particulière des couches de niveau qui dépassent la surface libre, et qui l'une après l'autre abandonnent l'atmosphère. Voyons maintenant ce que devient cette matière ayant subi un premier degré de condensation.

9. Considérons l'une des zones délaissées dans le plan de l'équateur. Si les divers points matériels dont elle est formée ont décrit primitivement un grand cercle, ils conserveront leur vitesse, telle que leur poids est exacte-

[1] Voyez les *Mémoires* déjà cités de 1851 et de 1854, n° 27. Voyez aussi mes *Recherches sur les atmosphères des Comètes*, n° 22, dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, tom. V, 1859.

ment équilibré par la force centrifuge. Ils continueront donc à circuler comme auparavant. L'ensemble de ces points constitue un cercle matériel se mouvant comme s'il était solide. Une série de cercles pareils successivement délaissés forme un anneau de largeur finie, circulant autour du centre commun, mais désormais indépendant du Soleil, c'est-à-dire étranger aux modifications ultérieures que le refroidissement apportera à la rotation solaire.

Ces anneaux nébuleux, agglomération de particules se mouvant sur des orbites à peu près circulaires, continuant à se condenser plus ou moins régulièrement, se sont rompus et finalement agglomérés, au moins partiellement, en masses sphéroïdales à l'état fluide. Telles furent, selon Laplace, les planètes à l'origine, tournant dans des orbes peu excentriques et tournant aussi sur elles-mêmes dans le sens de la révolution, en vertu de l'excès de vitesse des molécules supérieures relativement aux inférieures.

10. *Des Anneaux intérieurs à l'atmosphère.* — Il est essentiel de remarquer actuellement que tout le fluide abandonné par la nébuleuse ne se disposera pas en anneaux décrivant le cercle équatorial, et par conséquent extérieurs à l'atmosphère[1]. Il n'en sera ainsi que pour ce qui se trouvait déjà dans le voisinage immédiat de l'équateur. Mais la portion du fluide atmosphérique en excès, qui des pôles descend vers l'équateur, en s'écoulant sur la surface libre, possédait primitivement une vitesse de circulation plus petite et variable suivant la distance polaire de chaque molécule. Cette vitesse peut sans doute augmenter un peu dans le trajet du pôle à l'équateur, à cause du frottement sur des couches marchant plus vite, mais elle restera toujours inférieure à celle de la région équatoriale.

La matière qui afflue à l'équateur n'est donc pas tout entière dans les conditions voulues pour décrire autour du centre du Soleil des grands cercles concentriques. Chaque molécule commence, il est vrai, à se mouvoir tangentiellement à l'équateur, mais chacune a sa vitesse propre et va décrire une ellipse de foyer O (*fig. 4*), d'autant plus allongée que cette vitesse est plus faible.

[1] *Mémoire sur la figure des atmosphères*. 1854, n° 30.

Appelons a le rayon initial OA, la vitesse de l'équateur $V = \omega a$, et la relation fondamentale du n° 3 donne $V = \sqrt{\frac{M}{a}}$.

Un point dont la vitesse tangentielle en A sera seulement hV, h étant un coefficient moindre que l'unité, au lieu du cercle a décrit une ellipse dont les éléments se déduisent des formules connues du mouvement elliptique.

La constante des aires est ici $k = ahV$; la constante des forces vives $b = h^2V^2 - \frac{2M}{a}$. Le demi grand axe a et l'excentricité e étant donnés par les équations

$$\frac{1}{\mathrm{a}} = -\frac{b}{M}, \qquad 1 - e^2 = \frac{k^2}{\mathrm{a}M},$$

on en conclut que le grand axe

$$AA' = 2\mathrm{a} = \frac{2a}{2 - h^2};$$

la distance périhélie

$$OA' = 2\mathrm{a} - a = \frac{ah^2}{2 - h^2};$$

et l'excentricité $e = 1 - h^2$. Enfin la vitesse au périhélie A′ est

$$V' = \frac{2 - h^2}{h} V,$$

par conséquent plus grande que V.

Quant à la vitesse estimée perpendiculairement au rayon, elle est, par l'équation des aires,

$$v = \frac{rd\varphi}{dt} = \frac{k}{r}.$$

Cherchons pour quelle distance R_1 du point O, la force centrifuge correspondante $\frac{v^2}{R_1}$ ferait équilibre à la pesanteur $\frac{M}{R_1^2}$. En tenant compte des valeurs de k et de V, on trouve

$$R_1 = ah^2.$$

Il existe donc une distance R_1 intermédiaire entre OA et OA′, telle que la vitesse de circulation de la molécule considérée soit précisément celle qui conviendrait au mouvement uniforme et circulaire.

11. Les molécules parties successivement de A avec une même vitesse tangentielle hV, décriront la même ellipse ; leur ensemble constitue ce que nous nommerons une *traînée elliptique*. Chaque point du cercle équatorial est l'origine d'un courant tout pareil. L'ensemble de ces traînées elliptiques peut former un *anneau intérieur*.

Supposons d'abord négligeable l'action du milieu atmosphérique dans lequel le phénomène se passe. La coexistence de cette infinité de particules, en mouvement sur des orbites elliptiques égales, mais distribuées dans tous les sens autour du foyer O, amènera finalement la destruction des vitesses suivant le rayon vecteur : elles s'annulent deux à deux, tandis que dans le sens de la rotation les vitesses se conservent. L'ensemble se transforme peu à peu en un système de cercles concentriques. Ces cercles eux-mêmes se rapprochent les uns des autres par le fait de la destruction des vitesses radiales, et tendent à se condenser en un anneau moyen de rayon $R_1 = ah^2$. Car pour une molécule dont la vitesse initiale était hV à l'aphélie A, la vitesse de circulation augmente de A au périhélie A′, et dans l'intervalle se trouve la position R_1, où la force centrifuge due à cette vitesse équilibre la gravité.

C'est donc à cette distance, et sous la forme d'un cercle de rayon R_1, que tendent à se réunir toutes les molécules parties avec une égale vitesse hV des divers points de la circonférence OA. Le fluide qui se détache de tout le contour du cercle équatorial se sépare suivant la valeur de h, se dilate en quelque sorte, et se distribue en une série de cercles de plus en plus rapprochés du centre O à mesure que h est plus petit, et dont chacun a sa vitesse spéciale. Leur ensemble constitue un *anneau intérieur* ; c'est un système d'une infinité de points matériels décrivant une série de cercles distincts et concentriques autour de O.

Si l'on pouvait admettre que tout le fluide qui vient s'accumuler à l'équateur possède une vitesse commune, un calcul approximatif indique que la valeur moyenne de h serait à peu près 0,7, d'où $h^2 = 0,5$; on aurait donc $R_1 = \frac{1}{2} a$. C'est sur ce cercle que l'anneau, ne pouvant subsister en A, irait se reconstituer. En réalité, il n'en est pas ainsi, parce que tout le fluide n'a pas la même vitesse : chaque particule décrit donc son orbite particulière, et chaque série d'égale vitesse forme un cercle particulier.

Telle a été l'origine des anneaux de Saturne, tout au moins de ceux dont le rayon est moindre que deux fois le rayon de la planète : car, la limite équatoriale de l'atmosphère de Saturne étant aujourd'hui égale à 2, il n'a pas pu y avoir d'anneau délaissé en deçà de cette distance. La théorie de Laplace, qui n'admet que des anneaux extérieurs, n'est pas applicable à ceux-là. Ils ont dû se former, comme on vient de l'expliquer, à l'intérieur de l'atmosphère.

12. D'autres cas peuvent encore se présenter. Le courant de matière qui s'écoule tout le long et dans le plan de l'équateur, entrant ainsi à l'intérieur de la nébuleuse, peut s'y dissoudre en quelque sorte et recommencer à en faire partie. Les traînées elliptiques qui y pénètrent profondément perdront bientôt leur vitesse de circulation, par l'effet de la résistance du milieu, et tomberont vers le centre. Mais celles qui s'écartent peu du cercle équatorial, c'est-à-dire pour lesquelles h diffère peu de l'unité, pourront persister. Le mouvement d'ensemble ou de circulation de ces particules est en retard sur celui de l'atmosphère, mais il tend à se régulariser : d'abord, comme nous venons de le dire, par leurs réactions mutuelles qui finiront par annuler les vitesses radiales, ensuite par l'influence du milieu où elles se meuvent.

La vitesse de ce milieu diminue, en effet, à mesure qu'on se rapproche du centre ; au contraire, en vertu du principe des aires $\frac{r\,d\varphi}{dt} = \frac{k}{r}$, la vitesse de circulation de chaque point d'une traînée croît de l'extérieur à l'intérieur en raison inverse de la distance au centre. Il y a une distance R_2 où ces vitesses sont égales. Pour la calculer, remarquons que la vitesse atmosphérique à cette distance est $\frac{VR_2}{a}$, et la vitesse de circulation de la molécule considérée est $\frac{k}{R_2}$ ou $\frac{ahV}{R_2}$. En les égalant, il vient

$$R_2 = a\sqrt{h}.$$

C'est dans cette région intermédiaire que tend à se réunir la substance de nos traînées.

Pour la valeur moyenne $h = 0{,}7$, $R_2 = 0{,}84a$. Mais on n'a à considérer que des valeurs de h plus grandes, répondant à des traînées peu allongées, sans quoi elles iraient se perdre dans la masse de la nébuleuse.

Aussi, ce sera toujours au voisinage du bord équatorial que s'accumuleront peu à peu les nébulosités affluant des deux pôles, formant à l'intérieur de l'atmosphère un anneau d'épaisseur croissante. Alimenté par des courants superficiels plus refroidis que le reste, cet anneau deviendra un centre de condensation aux dépens des régions voisines, jusqu'à ce que, venant à se rompre par défaut d'homogénéité, il se transforme en un ou plusieurs sphéroïdes. Nous verrons que c'est le cas de la Lune : elle s'est développée progressivement au sein même de l'atmosphère terrestre, jusqu'à ce que celle-ci, se retirant peu à peu, ait abandonné son satellite.

13. En résumé, les anneaux extérieurs, les seuls que Laplace ait considérés, se sont formés, aux limites successives L, de particules décrivant à l'origine un grand cercle équatorial, et qui ont conservé leur vitesse initiale.

Les molécules parties des divers points de l'équateur avec une vitesse tangentielle insuffisante, pénètrent à l'intérieur de la limite L en décrivant des ellipses plus ou moins allongées dont O est le foyer commun. Elles constituent des *traînées elliptiques*.

De ces traînées, les plus allongées disparaissent bientôt au sein de la nébuleuse. Celles qui s'écartent peu de la forme circulaire pourront constituer à l'intérieur et vers le bord de l'équateur une zone plus ou moins considérable. Enfin, si l'atmosphère est suffisamment raréfiée pour que son action soit négligeable, ces traînées elliptiques se convertiront peu à peu en un *anneau intérieur*, c'est-à-dire en un groupe de traînées circulaires, enveloppe des trajectoires de points décrivant uniformément des cercles concentriques.

II.

DE LA FORMATION DES SATELLITES.

14. Lorsqu'un anneau s'est rompu, puis transformé en une masse sphéroïdale, celle-ci, à son tour, peut engendrer une planète accompagnée de satellites. Il est facile d'abord de concevoir qu'elle a dû prendre un mouve-

ment de rotation autour d'un axe à peu près perpendiculaire au plan de l'orbite, dans le sens même de la révolution autour du Soleil. Elle est donc comparable à la nébuleuse solaire, mais sous de moindres proportions. Cette nouvelle nébuleuse, dans son refroidissement ultérieur, se condensera en un noyau central tournant dans le même sens, et abandonnera le long de son équateur des anneaux nébuleux. Ceux-ci, passant par les mêmes phases que ceux du Soleil, pourront produire des satellites.

Toutefois, dans la condensation de ces systèmes secondaires intervient une influence nouvelle: c'est l'attraction du Soleil sur la planète à l'état de vapeurs. Sous cette action, l'atmosphère planétaire s'allonge dans le sens du rayon qui joint son centre au Soleil. De cet allongement résulte une tendance de la nébuleuse à tourner constamment vers le Soleil les mêmes points de sa surface. Ainsi s'établit l'égalité entre les mouvements de rotation et de translation de la planète, égalité qui pour une raison analogue a lieu aujourd'hui chez la Lune, et qui a dû se rencontrer chez toutes les planètes dans la première phase de leur existence.

15. Tout le temps que s'est maintenue cette égalité, la nébuleuse planétaire est restée dans des conditions impropres à la formation de satellites. Sa rotation, il est vrai, tend toujours à s'accélérer par suite du refroidissement, mais l'attraction solaire sur le renflement de la nébuleuse s'y oppose. A la place de cette accélération, il se produit dans la masse des phénomènes thermiques corrélatifs de la vitesse détruite, et la rotation se maintient constante. La limite atmosphérique L reste invariable, ce qui empêche tout abandon de zones équatoriales.

La condensation continuant toujours, l'action perturbatrice du Soleil, qui est sensiblement proportionnelle au volume de la nébuleuse, diminue peu à peu, et il arrive un moment où elle est insuffisante pour maintenir l'égalité des deux mouvements. A partir de cette époque, la vitesse de rotation commence à croître, et avec elle la force centrifuge; la nébuleuse planétaire redevient assimilable à la nébuleuse solaire, et peut dès-lors abandonner des anneaux secondaires, origine des satellites de la planète.

Si l'égalité des deux mouvements s'était indéfiniment conservée, la production de ces anneaux n'aurait jamais été possible. Si donc cette égalité existe actuellement chez tous les satellites, comme pour la Lune, en conséquence de l'allongement de ces corps vers leur planète, on en doit conclure qu'il n'y a pas de satellites de second ordre.

16. *Action du Soleil sur une nébuleuse planétaire.* — Quand une planète est à l'état nébuleux, l'action solaire détermine un allongement suivant la direction du Soleil, et il en est de même de l'action d'une planète sur une nébuleuse secondaire. Dans un *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné*[1], j'ai montré que l'action dont il s'agit est mesurée par une certaine fonction

$$U = \frac{r^3}{\mu a^3},$$

où μ est le rapport de la masse fluide à la masse perturbatrice, $\frac{r}{a}$ le rapport des dimensions du sphéroïde comparées à la distance de l'astre troublant.

Prenons la nébuleuse dans son état initial, alors que, tournant sur elle-même en un temps égal à celui de sa révolution, elle s'étend jusqu'à la limite théorique de son atmosphère. Nous avons établi (*Rech. sur les atm. des Comètes*, nº 27) qu'alors

$$\frac{r}{a} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}},$$

d'où $r^3 = \frac{1}{3}\mu a^3$, et

$$U = \frac{1}{3}.$$

Cette fonction étant constante, il s'ensuit que, dans les conditions supposées, l'action directrice de l'astre central reste toujours la même, et cela quelle que soit la nébuleuse, planète ou satellite.

A mesure que la condensation avance, les choses changent complètement. En effet, μ ne varie pas sensiblement, mais $\frac{r}{a}$ décroît très-vite, surtout s'il s'agit d'une planète ; et, bien que dans ce cas $\frac{1}{\mu}$ soit très-grand, $\frac{r^3}{a^3}$ ne

[1] *Académie des Sciences et Lettres de Montpellier*, section des Sciences, tom. I, années 1849, 1850, et tom. II, 1851.

tarde pas à devenir tellement petit que U ne suffit plus pour maintenir la direction de la planète. A ce moment, la vitesse de rotation, qui jusque-là était restée égale à la vitesse de translation, commence à s'accélérer.

17. S'il s'agit au contraire d'un satellite à l'état fluide, U mettra bien plus longtemps à décroître, et il pourra même ne jamais tomber au-dessous de la limite où l'action directrice cesserait. Cela tient à ce que $\frac{r}{a}$ décroît beaucoup moins vite. On le conçoit *à priori*: à l'époque où se forme la nébuleuse satellite, elle a déjà subi, en tant que nébuleuse planétaire, une grande partie de la condensation dont elle est susceptible. En fait, un calcul direct montre que les satellites ont éprouvé depuis leur origine une bien moindre contraction que les planètes : ainsi, le rayon actuel du premier satellite de Jupiter est $\frac{1}{4}$ du rayon de son atmosphère initiale, le rayon de la Lune $\frac{1}{36}$, et celui de la Terre $\frac{1}{235}$ seulement.

Voilà comment la Lune tourne encore aujourd'hui une même face vers la Terre. Il en fut de même des planètes à l'égard du Soleil dans la première période de leur existence; mais l'égalité de leurs deux mouvements a cessé quand, par une condensation brusque de la nébuleuse planétaire ou par la diminution continue de U, l'action directrice est devenue insuffisante.

18. Dans cette seconde phase de la condensation d'une planète, il est encore nécessaire de tenir compte de l'action solaire, parce qu'elle détermine dans la masse fluide une *marée*, c'est-à-dire une déformation périodique résultant de la tendance du fluide à s'allonger suivant la direction de l'astre central. Je vais rappeler ici les points principaux de la solution que j'ai donnée de cette question [1]. Je considère une planète entourée d'une immense atmosphère, et j'admets les mêmes simplifications qu'au n° 5.

Soit d'abord la rotation de même durée que la révolution, ce qui a lieu pour toute planète au début de sa condensation. L'atmosphère est alors susceptible d'un état d'équilibre permanent dans lequel les couches de

[1] *Mém.* de 1854, n° 37. — *Recherches sur les atmosphères des Comètes*, n° 27.

niveau ne sont plus de révolution autour de l'axe de rotation, mais elles ont un centre de figure et trois axes principaux. Sensiblement sphériques vers le centre, elles s'aplatissent aux pôles à mesure qu'on s'éloigne du centre, et en même temps elles s'allongent suivant la direction du corps troublant M (*fig.* 5), c'est-à-dire du Soleil.

Appelant R le demi-axe des pôles de la *surface libre*, R′ celui qui est tourné vers le corps extérieur, R″ le troisième, on a

$$R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}\,;$$

a est la distance OM du Soleil, μ le rapport des masses de la planète et du Soleil, rapport qui sera toujours fort petit. R′ est la limite équatoriale de l'atmosphère dans la direction du Soleil. C'est le plus grand des trois demi-axes, R est le plus petit. Pour μ infiniment petit, $\frac{R}{R'}$ est racine de l'équation $v^3 + 9v - 6 = 0$, d'où

$$\frac{R}{R'} = 0{,}638\,, \quad \text{et} \quad \frac{R''}{R'} = \frac{2}{3}.$$

Il s'ensuit $R' = 1{,}567\,R$, et $R'' = 1{,}045\,R$, de sorte que les trois axes sont à peu près comme les nombres entiers 34, 23 et 22. L'allongement vers le Soleil et en sens opposé est donc très-sensible, tandis que l'effet de la rotation est presque négligeable. Une petite augmentation dans la masse du satellite (que les formules précédentes supposent infiniment petit) aurait pour effet de diminuer un peu le grand axe, mais surtout d'augmenter l'axe moyen.

Les sommets du grand axe de la surface libre sont des points singuliers où elle affecte une forme conique ; les plans tangents en ces points ont pour enveloppe le cône $4x^2 - 9y^2 + 3z^2 = 0$.

La discussion des surfaces de niveau extérieures à la surface libre montre que celles qui dépassent immédiatement cette surface s'ouvrent à leur rencontre avec la surface limite, y deviennent tangentes au rayon vecteur, puis s'écartent indéfiniment. Dans ce cas, s'il y a excès de fluide atmosphérique, il s'écoulera par les deux sommets opposés du grand axe, comme par deux pointes, suivant la direction du Soleil et dans la direction opposée.

Mais la limite équatoriale L est ici constante, d'après nos suppositions : le refroidissement de la nébuleuse planétaire ne saurait donc produire cet écoulement, qui pourrait au contraire résulter d'une dilatation accidentelle et extraordinaire de l'atmosphère.

19. *Évaluation de la marée solaire.* — Lorsque, par suite de la condensation de la planète, l'attraction solaire n'est plus capable de maintenir l'égalité des deux mouvements, la nébuleuse cesse de présenter constamment au Soleil les mêmes points de sa surface; la rotation s'accélère, et il n'y a plus d'équilibre possible pour la nébuleuse, plus de figure permanente pour son atmosphère, le Soleil changeant à chaque instant de position par rapport à la planète. Dès-lors, ainsi qu'on le fait pour un premier essai d'explication du phénomène des marées, nous admettrons que l'atmosphère planétaire prend à chaque instant la figure avec laquelle elle pourrait être en équilibre sous l'action du Soleil. Cette déformation continuelle qu'elle subit constitue une marée réglée sur le mouvement de l'astre troublant. A une question insoluble de dynamique nous substituerons ainsi la recherche de la figure que le fluide tend à prendre, ce qui donnera au moins une notion approximative de la figure qu'il prend effectivement.

A la faveur de ces suppositions, nous avons établi (*Mém.* de 1854, n° 41) les formules applicables à une *atmosphère planétaire* dans la seconde période de sa condensation. On peut aussi les déduire des équations générales données dans nos *Recherches sur les atmosphères des Comètes*, n^{os} 4 et sq. Ces formules dépendent du rapport

$$\gamma = \frac{T^2}{t^2},$$

T, *t* étant les durées de la translation et de la rotation; ce rapport était égal à l'unité dans la première phase de la condensation, c'est le cas traité au n° 18; γ augmente très-rapidement à mesure que la rotation s'accélère. Quant au rapport μ des masses de la planète et du Soleil, nous le supposerons encore très-petit.

20. La surface libre de l'atmosphère est toujours aplatie aux pôles et allongée vers l'astre troublant. R, R′, R″ ayant la même signification que tout à l'heure, le demi grand axe R′ ou la limite équatoriale est

$$R' = a\sqrt{\frac{\mu}{2+\gamma}}.$$

Les rapports des axes $\frac{R}{R'} = v$ et $\frac{R''}{R'} = w$ sont donnés par les équations:

$$v^3 + 3(2+\gamma)\,v - 2(2+\gamma) = 0\,,$$
$$(1-\gamma)\,w^3 + 3(2+\gamma)\,w - 2(2+\gamma) = 0\,.$$

Ces rapports sont l'un et l'autre moindres que l'unité, et $R < R'' < R'$ (*Mém.* de 1854, n° 12).

Pour γ très-grand, les équations se réduisent à

$$v = \frac{R}{R'} = \frac{2}{3}\,, \qquad w = \frac{R''}{R'} = 1\,,$$

c'est-à-dire que, la rotation devenant plus rapide, R' diminue, R'' toujours moindre que R' s'en rapproche de plus en plus; enfin R tend vers les $\frac{2}{3}$ de R'. Ces valeurs limites pour $\gamma = \infty$ conviennent à la fois au cas d'une planète dont la rotation serait excessivement rapide, et au cas où T serait nul, c'est-à-dire où il n'y aurait pas de translation. Cela revient à dire que ce qu'on a établi touchant la figure de l'atmosphère solaire, avec toutes les conséquences qui en découlent, devient exactement applicable à une atmosphère planétaire: 1° lorsque la planète est très-éloignée du Soleil, parce que l'action perturbatrice de cet astre est négligeable; 2° lorsque la rotation de la planète est très-rapide, attendu que la force centrifuge prédomine sur l'action perturbatrice, dont l'effet devient insensible et disparaît en quelque sorte.

21. La surface limite possède encore aux sommets du grand axe deux points singuliers A, A' (*fig.* 6), où les plans tangents sont en nombre infini et ont pour enveloppe le cône

$$3(2+\gamma)\,y^2 - 3z^2 - (3+\gamma)\,x^2 = 0.$$

C'est par ces deux pointes opposées que s'échappera l'excès de fluide atmosphérique.

Dans le cas actuel, cette circonstance se présente comme une conséquence du refroidissement: car par l'accélération du mouvement de rotation le rapport γ augmente indéfiniment, et la limite R′ diminue. Les couches atmosphériques qui resteront au-delà de cette limite devront donc abandonner la planète.

22. *Condition nécessaire pour la production d'un anneau secondaire.* — Tant que γ n'est pas infiniment grand (auquel cas l'assimilation de la nébuleuse planétaire à l'atmosphère du Soleil serait complète), cet abandon ne se fait plus par tout le contour équatorial de la nébuleuse, il a lieu seulement par les deux extrémités opposées A, A′ du grand axe (*fig.* 6). Or cet axe R′ varie constamment de position dans l'espace et par rapport à la planète, puisqu'il suit le Soleil dans son mouvement apparent.

Au lieu d'un anneau régulièrement disposé autour de la planète, au lieu d'anneaux semblables venant successivement se joindre aux précédents, nous avons maintenant deux émissions de matière s'effectuant à la fois par deux points opposés ; puis, à une seconde condensation, deux nouvelles émissions également opposées, mais suivant une direction différente de la précédente, et ainsi de suite. Les diverses masses ainsi délaissées l'une après l'autre dans le plan de l'équateur, ne présentent aucune condition de stabilité et de durée : les unes resteront distinctes, les autres se grouperont partiellement, mais elles ne formeront certainement pas un système comparable aux zones qui viennent se déposer régulièrement tout autour de l'équateur solaire.

En réalité, il est aisé de s'assurer que les satellites à nous connus ne se sont pas produits dans la seconde période de condensation que nous venons d'étudier. Ils appartiennent à une phase bien postérieure, où la durée de rotation de la planète se trouvait déjà tellement réduite, que l'allongement de la nébuleuse planétaire vers le Soleil était presque négligeable (nº 20).

23. Cependant, comme la distance a du Soleil à la planète ne saurait être infinie par rapport à ses dimensions, on n'aura jamais exactement $R'' = R'$. On est ainsi amené à chercher quelle valeur doit avoir le rapport $\gamma = \frac{T^2}{t^2}$, pour que la différence de ces deux axes soit égale à une longueur donnée Ω. On pourra par là se rendre compte du degré de petitesse où doit

descendre cette différence pour que l'atmosphère se comporte comme si les axes R′, R″ de l'équateur étaient égaux : c'est alors que la planète abandonnera dans le plan de son équateur des anneaux analogues aux anneaux planétaires.

Nous venons de voir que le rapport $\frac{R''}{R'}$ tend vers l'unité pour γ infini. Si donc on suppose Ω très-petit, γ sera très-grand. On aura alors approximativement

$$R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{\gamma}},$$

avec

$$\frac{R''}{R'} = w, \qquad R' - R'' = \Omega.$$

D'où l'on conclut :

$$\Omega = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{\gamma}}(1 - w),$$

w étant déterminé par la seconde équation du n° 20.

Or de cette équation on tire

$$\gamma = \frac{w^3 + 6w - 4}{w^3 - 3w + 2};$$

et en posant $1 - w = u$,

$$\gamma = \frac{u^3 - 3u^2 + 9u - 3}{u^3 - 3u^2}.$$

Comme, par hypothèse, w diffère peu de l'unité, u sera fort petit ; et dans une première approximation on écrira simplement

$$\gamma = \frac{1}{u^2}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Portant cette valeur de u à la place de $1 - w$ dans l'expression de Ω, et faisant disparaître les radicaux, il vient

$$\Omega^6 = \frac{\mu^2}{\gamma^5}a^6.$$

Telle est l'équation qui servira à calculer approximativement Ω pour une valeur donnée de γ.

Réciproquement, si l'on donne Ω, on pourra calculer γ, et par suite le rapport $\frac{T}{t}$ qui en est la racine carrée. On a du reste la relation

$$\left(\frac{t}{T}\right)^5 = \frac{\Omega^3}{\mu a^3} \cdot$$

24. Au même degré d'approximation, c'est-à-dire pour γ extrêmement grand, on a donc

$$u = \frac{t}{T}\,; \quad \frac{R''}{R'} = 1 - u = \frac{T - t}{T}\,, \quad \Omega = uR' = \frac{t}{T}\,R'\,;$$

et enfin

$$\frac{R' - R''}{R'} = u = \frac{t}{T}\cdot$$

Ce dernier rapport peut être appelé l'*allongement du sphéroïde* par suite de la marée solaire, et son expression est simplement le quotient de la durée de rotation de la planète à l'époque où on la considère divisée par la durée de sa révolution autour du Soleil.

Les formules qui précèdent, suffisamment approchées pour les autres satellites, ne le sont pas pour la Lune. Au moment de sa formation, la rotation de l'atmosphère terrestre s'effectuait en un temps peu différent de $t = 27^j{,}3$; d'où $\frac{T}{t} = 13{,}36$, et $\gamma = 178{,}5$. Ici γ n'est point assez grand pour pouvoir se borner à la première approximation $\gamma = \frac{1}{u^2}$, ou $u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Il faut résoudre l'équation du troisième degré entre u et γ du numéro précédent; et l'on trouve

$$u = \frac{R' - R''}{R'} = 0{,}068,$$

au lieu de $0{,}075$, valeur du rapport $\frac{t}{T}$.

25. Nous avons énoncé, au n° 4, ce principe : la durée de rotation du Soleil au moment de la formation d'une planète, ou tout au moins de la zone nébuleuse qui lui a donné naissance, ne diffèrait pas sensiblement de la durée actuelle de révolution de cette planète. De même pour une nébuleuse planétaire : la limite de l'atmosphère d'une planète ayant successivement atteint les distances où se trouvent aujourd'hui ses satellites, la durée

de révolution de l'un d'eux fait connaître quelle était, au moment de sa formation, la durée de rotation de la planète.

Cette remarque, jointe aux formules précédentes, permet de calculer l'allongement vers le Soleil d'une planète quelconque, à l'origine d'un de ses satellites. Il suffit de prendre pour t la durée de révolution du satellite, pour T la révolution de la planète même.

Cela étant, considérons successivement chaque planète et son satellite le plus éloigné; nous obtiendrons le tableau suivant :

	La Terre.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.
T	365,2	4332	10759	30687
t	27,3	16,7	79,3	107,7
$\frac{T}{t}$	13,36	259	136	285
u	0,068	0,0039	0,0074	0,0035
R′	60,3	27,0	64,4	91,0
Ω	4,1	0,11	0,48	0,32

R′ désigne la limite supposée de l'atmosphère planétaire; nous l'avons prise égale à la distance moyenne du satellite le plus éloigné. Nous avons mis de côté Neptune, à qui l'on ne connaît qu'un satellite, mais qui en a sans doute davantage.

26. On voit d'abord que, sauf pour la Terre, le nombre u, qui mesure l'allongement de la planète vers le Soleil, est fort petit. A l'époque où l'atmosphère terrestre atteignait la Lune, son allongement $\frac{1}{15}$ était très-notable. Quant à Jupiter, Saturne et Uranus, au moment où commençait la formation de leurs satellites, l'allongement était mesuré par des fractions très-petites et tout à fait du même ordre : 39, 74 et 35 dix-millièmes.

D'autre part, la différence Ω des axes R′, R″, exprimée en fraction du rayon de la planète correspondante, est, pour ces trois planètes, 11, 48 et 32 centièmes, nombres qui sont aussi du même ordre de grandeur.

Enfin, ces différences elles-mêmes, exprimées au moyen d'une unité commune, le rayon terrestre, sont :

1,2 4,5 1,3

Pour la Terre c'est 4,1 ; il y a donc presque identité entre ces valeurs de Ω.

Cette coïncidence, qui serait bien singulière si elle était fortuite, met hors de doute notre assertion : il n'a pu se former de satellite autour d'une nébuleuse planétaire, tant que la différence $R'—R''$ de ses axes équatoriaux est restée supérieure à une certaine grandeur.

Il a fallu que l'action du Soleil fût assez réduite pour que la forme de l'atmosphère planétaire devînt comparable à celle de la nébuleuse solaire : alors seulement s'est trouvé possible l'abandon sur tout le pourtour de l'équateur, et non en deux points opposés de cet équateur, du fluide atmosphérique en excès. L'origine des satellites a été subordonnée à la formation de zones équatoriales susceptibles de se transformer ultérieurement en sphéroïdes de dimension considérable.

Mais si une différence entre R' et R'' dépassant à peine quatre rayons terrestres semble absolument insignifiante quand il s'agit du monde de Jupiter et des autres grosses planètes, elle n'est pas négligeable relativement à l'atmosphère de la Terre, étendue même jusqu'à la Lune. Lors de la formation de ce satellite, l'action directrice du Soleil sur la nébuleuse terrestre, quoique bien diminuée, était encore sensible. C'est que la Lune est un satellite exceptionnel, présentant dans son origine des circonstances très-spéciales. Ces circonstances ont sans doute fait défaut chez les autres planètes du même groupe; c'est pourquoi Mars, Vénus et Mercure manquent de satellites. Nous verrons plus loin que cet allongement considérable de l'atmosphère terrestre a joué un rôle essentiel dans la formation de la Lune, et se rattache ainsi à certaines particularités de son mouvement.

27. Prenons maintenant la question en sens inverse, et admettons que la différence $R' — R'' = \Omega$ ait été la même pour chaque planète au moment où elle déposait son premier anneau, celui qui devait donner naissance au satellite le plus éloigné; cherchons à calculer le rayon de ce premier anneau. L'inconnue du nouveau problème est donc R', qu'il faut exprimer en fonction de Ω. Or, lorsque γ est déjà assez grand, ce qui peut être admis ici , on a sensiblement (n° 20)

$$R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{\gamma}},$$

avec $\gamma = \frac{T^2}{t^2}$. On a trouvé, au n° 23, $\Omega^6 = \frac{\mu^3}{\gamma^5}a^6$. Éliminant γ, il vient

$$R'^5 = \mu a^3 \Omega^2.$$

Cette formule suppose les trois longueurs R', a, Ω, exprimées au moyen de la même unité, par exemple la distance de la Terre au Soleil. Attribuons à Ω la valeur 0,000187 équivalente à 4,5 rayons terrestres, ce qui est l'allongement $R'—R''$ de l'atmosphère de Saturne vers le Soleil, quand elle s'étendait jusqu'au dernier satellite. Exprimons de plus les distances R' en fonction du rayon de la planète correspondante, nous trouvons pour les grosses planètes les valeurs suivantes de R' :

Jupiter.	Saturne.	Uranus.	Neptune.
48,6	64,4	155	200

C'est en deçà de ces distances qu'on doit s'attendre à trouver des satellites. Ce point sera développé plus tard; dès à présent, on voit que Neptune a probablement d'autres satellites au-delà du seul qu'on lui connaisse aujourd'hui, et dont la distance est de 13 rayons seulement.

Ce que nous voulions mettre en évidence par cette discussion, c'est que l'action du Soleil sur une nébuleuse planétaire a été un obstacle à la formation des satellites, et qu'il en résulte une limite supérieure au-delà de laquelle il n'a pu s'en produire. Elle a ainsi restreint le nombre des satellites possibles, et a pu même empêcher certaines planètes d'en acquérir.

III.

CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE PLANÈTE A L'ÉTAT FLUIDE.

28. Laplace a expliqué comment des zones concentriques de matière nébuleuse, déposées les unes à la suite des autres dans le plan de l'équateur solaire, au lieu de se conserver indéfiniment, se sont transformées en une nébulosité sphéroïdale destinée à devenir plus tard une planète. Il aurait fallu, pour assurer leur durée sous forme annulaire, une régularité et une

homogénéité de constitution impossibles à réaliser physiquement. On comprend au contraire qu'il s'y soit rencontré des centres de condensation autour desquels la matière environnante s'est réunie; leur masse a été ainsi divisée en fragments continuant à se mouvoir individuellement à peu près comme avant d'être séparés. Suivant des routes peu différentes, ces fragments ont pu se rejoindre et finalement se confondre en une masse unique circulant autour du Soleil suivant la circonférence de l'anneau primitif. En outre, elle tourne sur elle-même dans le même sens, parce que les molécules les plus éloignées du Soleil ont une vitesse absolue supérieure à celle des molécules les plus voisines.

Mais, pour que cette agglomération, que nous appelons une nébuleuse planétaire, puisse subsister, il ne suffit pas que, par un concours de circonstances convenables telles que celles que nous venons d'énumérer, la matière dispersée dans un anneau se trouve réunie et condensée en une même région. Pour que cette agglomération soit durable, elle doit satisfaire à certaines conditions d'existence ; sans quoi, au lieu de constituer un astre permanent, aussitôt formée, elle tendra à se dissoudre en fragments qui, se condensant séparément, continueront à suivre autour du Soleil leur route primitive, mais sous forme de poussière incohérente. C'est ce qui arrive pour les comètes: une grande partie du fluide émis par ces astres sous l'influence du Soleil, et particulièrement au voisinage du périhélie, se trouve à jamais perdu pour la comète, une fois hors de sa sphère d'attraction[1]. Il est à croire qu'il en fut ainsi à l'origine pour une portion considérable des nébulosités successivement échappées à l'atmosphère du Soleil. Elles subsistent encore à l'état d'astéroïdes infiniment petits, et, n'ayant pas formé d'astre proprement dit, ne deviennent visibles que lorsqu'elles se présentent sous une grande épaisseur, comme la lumière zodiacale.

29. Amené par ces considérations à rechercher les circonstances propres au maintien d'une planète fluide, sans que l'action perturbatrice du Soleil

---

[1] Voir mes *Réflexions sur la théorie des phénomènes cométaires*, 1860; et *Nouvelles Recherches sur la figure des atmosphères des corps célestes*, 1862, dans les Mémoires de l'Académie de Montpellier, tom. IV et V.

en vienne détruire la stabilité, je dois rappeler l'étude que j'ai faite des figures d'équilibre d'une masse fluide soumise à diverses conditions [1].

A l'origine d'une nébulosité planétaire, ce n'est pas à un noyau enveloppé d'une atmosphère qu'il est exact de l'assimiler, mais plutôt à une masse fluide sensiblement homogène. On pourra donc lui appliquer approximativement ce que j'ai trouvé pour les conditions d'existence d'un sphéroïde fluide, homogène, tournant sur lui-même, dont les molécules s'attirent mutuellement, et sollicité de plus par l'action du Soleil, c'est-à-dire d'un corps troublant fort éloigné.

Même en négligeant cette dernière action, l'équilibre sous forme ellipsoïdale n'est pas toujours possible, du moins quand la vitesse angulaire est donnée *à priori* : cette vitesse ne peut pas dépasser une certaine limite qui dépend de la densité du fluide.

Dans mon *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné*, j'ai traité en détail cette question, en tenant compte de l'action perturbatrice qu'un astre extérieur situé à grande distance dans le plan de l'équateur exerce sur le fluide. J'ai examiné séparément les divers cas qui peuvent se présenter : notamment celui où la rotation est nulle, c'est le cas d'un astre marchant en ligne droite vers le Soleil ; et celui où la rotation de la masse fluide est égale à sa translation, ce qui se rencontre chez la Lune et probablement aussi chez d'autres satellites.

J'ai appelé l'attention sur une condition qui, dans ces deux cas, est indispensable à l'existence du fluide sous la forme permanente d'un ellipsoïde, c'est que le rapport

$$U = \frac{M}{\rho a^3}$$

soit inférieur à une certaine limite dont j'ai donné la valeur numérique. M est ici la masse du corps troublant, a la distance des deux astres, et ρ la densité du fluide. Ce rapport est le même qu'on a considéré, au n° 16, comme mesurant l'influence d'un astre extérieur sur une nébuleuse, pour l'allonger dans le sens du rayon vecteur et la maintenir dans cette direction.

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, ann. 1849, 1850 et 1851. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tom. XXVIII, pag. 762 ; tom. XXXI, pag. 515.

On devait le prévoir ; et l'on peut aussi écrire $U = \frac{Mr^3}{ma^3}$, en appelant m et r la masse et le rayon moyen du sphéroïde, d'où m proportionnel à ρr^3.

Bien qu'il ne soit pas impossible que des figures non elliptiques conviennent à l'équilibre, on comprend cependant qu'une condition analogue aux précédentes soit nécessaire dans tous les cas ; et cette condition sera une relation entre la densité du fluide, sa vitesse de rotation, la distance et la masse du corps extérieur, qui est le Soleil à l'égard d'une planète, la planète s'il s'agit d'un satellite.

50. Ceci admis, faisons l'application à notre système. La fonction $\frac{M}{\rho a^3}$ a varié à partir de la formation de la planète la plus éloignée, car a diminue et ρ va en augmentant, suivant toute probabilité. Il est à remarquer que le produit ρa^3 resterait sensiblement constant si la nébuleuse solaire se conservait homogène pendant la contraction du système, parce que ρ varierait alors en raison inverse du volume.

Mais dès qu'un noyau s'est formé au centre de la nébulosité solaire, la condensation s'opère autour de ce centre, et l'accroissement de ρ à la périphérie est moins rapide ; de sorte que, a diminuant peu à peu, le produit ρa^3 diminue aussi à la surface extérieure de la nébuleuse. Ainsi, il arrivera que, pour une zone abandonnée et pour la nébuleuse planétaire qui en dérive, U sera une fonction croissante qui pourra atteindre et dépasser la limite où l'équilibre cesse d'exister. A partir de là, l'existence de la planète sous forme ellipsoïdale, et probablement sous toute autre figure, devient impossible.

On doit présumer que cela s'est produit après la formation de la planète Jupiter. Le rapport $\frac{M}{\rho a^3}$ ayant alors atteint la limite dont nous parlons, et a continuant à décroître, il est arrivé que, à la distance intermédiaire entre Jupiter et Mars, où se serait formée une nouvelle planète, ce rapport s'est trouvé trop grand pour qu'elle pût subsister sous forme permanente. Dès-lors la substance de l'anneau correspondant, au lieu de s'agglomérer en un grand sphéroïde, a dû se résoudre en nébulosités partielles se mouvant et se condensant isolément.

Par les progrès de la condensation, ces nébulosités ont acquis plus tard une densité suffisante pour que la fonction U redevînt inférieure à la limite voulue; elles ont pris alors une figure d'équilibre et sont devenues de véritables planètes, mais en conservant désormais leur individualité. Telle est l'origine probable du groupe nombreux d'astéroïdes qui occupe cette région de l'espace. On peut, à ce point de vue, les considérer comme les débris d'une planète primitive, mais cette planète n'a existé, pour ainsi dire, que virtuellement, s'étant spontanément décomposée à l'instant même où elle tendait à se former.

Si après la région des astéroïdes apparaissent de nouvelles planètes, Mars, la Terre, Vénus et Mercure, c'est qu'il est alors survenu dans la nébulosité solaire un changement de nature, entraînant un accroissement de la densité suffisant pour que, le rapport U retombant au-dessous de la limite, l'équilibre permanent d'un sphéroïde fluide redevînt possible.

31. Les planètes télescopiques comprises entre Mars et Jupiter sont d'une nature analogue aux planètes supérieures, ou forment la transition aux suivantes; mais immédiatement après s'est présentée à la limite de l'atmosphère solaire une matière nouvelle. Il y a donc lieu de considérer plusieurs périodes dans la condensation du Soleil, et le groupe de planètes qui commence à Mars se distingue nettement des autres.

Cette distinction est confirmée par le fait que, à partir de Mars, la densité moyenne actuelle des planètes est quatre à cinq fois plus grande que celle des planètes supérieures. Cela indique une différence essentielle de composition chimique; il faut toutefois remarquer que la densité actuelle ne doit pas être confondue avec la valeur de ρ du rapport U, laquelle est la densité de la zone nébuleuse au moment où elle cherchait à se constituer en planète.

Quant à l'atmosphère même du Soleil, on est conduit à la regarder comme formée primitivement d'une série de couches de nature diverse, se terminant à des distances différentes du centre, et que la limite L, en diminuant, a successivement atteintes; ces couches ont contribué l'une après l'autre à la formation des anneaux planétaires. L'un de ces changements s'est manifesté après Jupiter et avant Mars. S'il a eu lieu progressivement, cette circonstance a encore contribué à empêcher la formation dans cet intervalle d'une grosse planète ; car, de la diversité de composition des anneaux successifs, a dû résulter leur inégale condensation, et par suite une difficulté plus grande de se réunir en un unique anneau.

Ces considérations se représenteront dans l'étude de l'anneau de Saturne, qui n'est lui aussi qu'une zone d'astéroïdes très-nombreux et très-voisins : il s'est formé dans une région où, par le trop grand rapprochement de la planète, un satellite fluide ne pouvait exister. Passons maintenant à un autre ordre d'idées qui conduit aux mêmes conclusions, savoir : la division des planètes en groupes bien séparés, caractérisés, lors de leur formation, par la différence des densités initiales.

IV

DE LA ROTATION DES PLANÈTES.

32. On sait que la durée de rotation de **Jupiter** et celle de Saturne diffèrent peu, et sont au-dessous d'un demi-jour, tandis que les planètes plus voisines du Soleil tournent sur elles-mêmes dans l'intervalle d'un jour à fort peu près. Nous allons chercher si cette coïncidence n'aurait pas une signification se rattachant à l'origine de ces corps.

Soit une planète à l'époque où, sa rotation étant égale à sa translation, l'influence solaire devient insuffisante pour maintenir cette égalité. A partir de ce moment, par suite de la contraction, la durée de rotation va continuellement en diminuant. Au début, la condensation n'est pas encore assez avancée pour qu'on ne puisse considérer le fluide comme sensiblement homogène, sauf vers le centre, et même négliger le noyau central dans le calcul approché de la masse et du moment d'inertie. La vitesse angulaire ω_1 de rotation est encore presque égale à la vitesse angulaire de révolution de l'anneau qui lui a donné naissance, égale aussi à la vitesse angulaire de rotation du Soleil au moment de l'abandon de cet anneau. Désignant par a la distance au Soleil de la planète en question, la troisième loi de Képler donne $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{h^2}{a^3}$, h étant un coefficient constant pour toutes les planètes. D'où :

$$\omega_1 = ha^{-\frac{3}{2}}.$$

Quant à la densité ρ_1 de la planète à la même époque, elle dépend de la densité de l'anneau qui l'a formée ; celle-ci, à son tour, de celle de l'atmosphère du Soleil à sa périphérie, au moment de l'abandon de l'anneau, laquelle, toutes choses égales d'ailleurs, varie à peu près en raison inverse du volume de l'atmosphère solaire : c'est donc $\frac{H}{a^3}$. Pour tenir compte du commencement de condensation qu'elle a subi, nous écrirons

$$\rho_1 = \frac{\alpha H}{a^3},$$

α est un coefficient indépendant de a, mais qui variera si la nature du fluide délaissé vient à changer.

33. La nébuleuse planétaire a la forme d'un sphéroïde dont les axes sont R, R′, R″, et que nous assimilerons à un ellipsoïde dans les calculs qui suivent. Son volume est donc $\frac{4}{3}\pi RR'R''$, et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation R est

$$Q_1 = M\frac{R'^2 + R''^2}{5} = \frac{4}{15}\pi\rho_1 RR'R''(R'^2 + R''^2).$$

Enfin, il résulte des formules du n° 18 qu'à l'époque initiale que nous considérons, et où l'on avait $t = T$, ou $\gamma = 1$, les rapports des axes étaient

$$R = 0{,}638\,R', \qquad R'' = \frac{2}{3}R'.$$

Soient, à l'époque actuelle, ω_0, Q_0, r_0, ρ_0, la vitesse angulaire de rotation, le moment d'inertie, le rayon moyen et la densité moyenne de la même planète. Admettons que la masse n'ait pas changé, ce qui suppose que les satellites ne font en somme qu'une minime fraction de la planète. Il en résulte la condition :

$$\rho_1 RR'R'' = \rho_0 r_0^{\,3}. \qquad (a)$$

La somme des aires décrites dans le plan de l'équateur n'a pas non plus varié notablement durant la condensation. On a donc

$$\omega_1 Q_1 = \omega_0 Q_0,$$

et $Q_0 = \frac{8\pi}{15}\rho_0 r_0^5$. Substituant les expressions des moments, il vient :

$$\omega_1 \rho_1 RR'R''(R'^2 + R''^2) = 2\omega_0 \rho_0 r_0^5 \ ,$$

et divisant par l'équation (a) ,

$$\omega_1 (R'^2 + R''^2) = 2\omega_0 r_0^2 \ . \qquad (b)$$

Ces relations peuvent s'écrire :

$$\frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} = \frac{(RR'R'')^2}{r_0^6}\ , \qquad (a') \qquad\qquad \frac{\omega_0^3}{\omega_1^3} = \frac{(R'^2 + R''^2)^3}{8 r_0^6}\ . \qquad (b')$$

Mais, par les expressions de R et de R″ en R′, on a :

$$RR'R'' = \frac{2}{3}.0,638\ R'^3\ , \qquad\qquad R'^2 + R''^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 R'^2 .$$

Ainsi $RR'R''$ est proportionnel à R'^3, $R'^2 + R''^2$ proportionnel à R'^2. Les seconds membres de (a') et (b') étant l'un et l'autre proportionnels à R'^6, on élimine le rapport $\frac{R'^6}{r_0^6}$, et l'on a

$$\frac{\omega_0^3}{\omega_1^3} = k^3 \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\ ,$$

k désignant un coefficient constant. De là,

$$\omega_0 = k\omega_1 \frac{\rho_0^{\frac{2}{3}}}{\rho_1^{\frac{2}{3}}} \ .$$

Portons dans cette équation finale les valeurs de ω_1 et de ρ_1 admises au n° précédent, il vient

$$\omega_0 = \frac{kh}{(\alpha H)^{\frac{2}{3}}}\rho_0^{\frac{2}{3}}\, a^{\frac{1}{2}} \ . \qquad (A)$$

Ce sera la vitesse angulaire de la planète.

34. En supposant α et H constants, la vitesse de rotation d'une planète serait proportionnelle à la racine carrée de sa distance au Soleil et à la puissance $\frac{2}{3}$ de sa densité actuelle. Si les densités ρ_0 étaient uniformes, ω_0 croîtrait assez rapidement avec a. Mais la densité, décroissant à mesure qu'on

s'éloigne du Soleil, agit en sens inverse de la distance, ce qui tend à atténuer la variation de ω_0.

A cause des suppositions que nous avons été obligé de faire pour arriver à la formule (A), nous devons la considérer simplement comme indiquant une relation à vérifier. Cette vérification nous édifiera sur la valeur de ces hypothèses. Pour comparer plus nettement à l'observation la loi qu'exprime la formule, nous y introduirons la durée t de la rotation actuelle à la place de $\omega_0 = \frac{2\pi}{t}$. Résolvant ensuite par rapport à la densité ρ_0, et désignant par c une nouvelle constante, on a

$$\rho_0 = \frac{c\alpha H}{(at^2)^{\frac{3}{4}}}. \qquad \text{(B)}$$

Tout se réduit donc à reconnaître si les densités actuelles des planètes varient en raison inverse de la puissance $\frac{3}{4}$ des produits at^2.

35. Or, si l'on détermine la constante de manière à ce que la formule donne, pour la Terre, $t = 1$, $a = 1$, $\rho_0 = 1$, on obtient les résultats suivants :

	Mercure.	Vénus.	Terre.	Mars.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.	Neptune.
$a =$	0,387	0,723	1,00	1,52	5,20	9,54	19,2	30,0
$t =$	0,97 3	0,973	~~0,997~~ 1	1,027	0,414	0,428	0,6?	0,7?
$\rho_0 =$	2,03	1,52	1,00	0,70	1,09	0,66	0,23	0,13
ρ réel	2,17	1,173	1	0,71	0,24	0,13		

Pour Uranus et Neptune, dont la rotation n'est pas connue, nous avons attribué à t les valeurs hypothétiques $0^j,6$ et $0^j,7$, d'après des considérations que l'on trouvera plus loin.

Examinons ce tableau. Nous voyons d'abord, en mettant provisoirement de côté Jupiter et Saturne, que les valeurs de ρ_0 sont admissibles, c'est-à-dire qu'elles ne diffèrent guère des densités réelles ; les différences sont de l'ordre des erreurs que comportent ces densités elles-mêmes, vu l'incertitude des masses et celle des diamètres.

Quant à Jupiter et Saturne, les valeurs trouvées, étant divisées par 5, donnent 0,22 et 0,13, qui sont les densités effectives de ces astres. Cela revient à dire que, dans la formule (B) qui sert à calculer ρ_0, il faut, pour ces deux planètes, attribuer au coefficient αH une valeur cinq fois moindre que lorsqu'il s'agit des autres. Or, nous avons défini le coefficient αH comme dépendant essentiellement de la nature des substances qui constituaient l'anneau correspondant à chaque planète et du mode de condensation. On est donc encore ramené à cette conclusion : Les planètes inférieures à Jupiter constituent un groupe caractérisé par une densité plus grande ; Jupiter et Saturne forment un autre groupe qui se distingue, non-seulement par sa densité actuelle beaucoup plus faible (ce qui lui est commun avec Uranus et Neptune), mais par une valeur de αH cinq fois moindre. Par conséquent, les anneaux dont ils dérivent étaient d'une nature spéciale et notamment d'une moindre densité que les autres anneaux.

36. L'intervalle entre Jupiter et Mars correspond à une modification essentielle de l'atmosphère primitive du Soleil, à un changement dans la nature physique du fluide abandonné par elle en ces régions. Et, comme cette région est précisément celle des astéroïdes, il est naturel d'y rattacher la cause qui a déterminé la formation de ce nombre immense de petits astres, au lieu d'une grosse et unique planète. Nous avons expliqué en effet que le rapport $\frac{M}{\rho a^3}$ s'est trouvé augmenté, en dessous de Jupiter, de manière à rendre impossible l'existence d'une planète sous une figure stable (nº 30). Mais, arrivé à la distance de Mars, le changement en question, consistant en un accroissement de ρ, a ramené ce rapport à une valeur assez petite pour que l'équilibre d'une planète fluide redevînt possible.

Remarquons aussi que ce changement de nature des zones abandonnées par le Soleil, s'il n'a pas eu lieu brusquement mais par degrés, a concouru au même résultat, en facilitant la séparation en plusieurs anneaux distincts d'une zone qui, homogène, se serait condensée autour d'un centre unique.

Concluons enfin que, si les durées de rotation des diverses planètes les classent naturellement en deux groupes, étant d'un jour environ pour les petites, d'un demi-jour pour les grosses, cette relation n'est point due au hasard : elle est liée aux densités actuelles de ces corps, mais elle dépend aussi de la densité initiale et de la condensation qu'ils ont subie. Elle fournit une indication précieuse sur la nature de la nébulosité solaire à ses limites successives, au moment de l'abandon des diverses zones planétaires[1].

V.

LOI DES DISTANCES DES PLANÈTES.

37. On n'a pas encore rendu raison de la relation assez régulière qui existe entre les intervalles planétaires. La loi de Bode représentait ces intervalles d'une manière suffisamment exacte avant la découverte de Neptune, dont la distance s'est trouvée beaucoup moindre qu'on ne le prévoyait. J'ai cherché [2] si l'on pourrait modifier la loi de Bode de manière à rétablir l'accord, et j'ai trouvé qu'en effet on peut représenter par une formule peu compliquée, sinon la distance moyenne des planètes, au moins des nombres compris, pour chacune d'elles, entre la plus petite et la plus grande distance au Soleil ; et c'est tout ce que l'on peut désirer. Saigey avait déjà remarqué que ce sont les distances aphélies que la loi de Bode représente le mieux. Quant à l'anomalie offerte par Neptune, nous en indiquerons tout à l'heure une raison plausible.

Ces formules, n'étant qu'empiriques, sont plus curieuses qu'utiles ; elles peuvent cependant conduire à une remarque essentielle. Écrivons d'abord la loi de Bode sous la forme algébrique :

$$4 + 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Pour $n = 1$, on a la distance 7 de Vénus ; pour $n = 2$, la distance 10 de la Terre, etc. Le premier terme 4 est la distance de Mercure. Dans la loi que j'ai proposée, la même forme est conservée, mais généralisée, en prenant :

$$A + Ba^n + B'a^{2n} + \ldots, \qquad (1)$$

où $a = 2$ quand il s'agit des planètes.

Ce mode de développement en exponentielles convient aussi, comme on le verra, à la représentation des distances des satellites; il nous paraît signifier

---

[1] Voir *Moniteur scientifique* de Quesneville, 1er juin 1870, pag. 557.

[2] *Note sur la loi de Bode*. Académie des Sciences et Lettres de Montpellier; Procès-verbaux de la section des Sciences, séance du 13 juin 1853.

que *les distances interplanétaires correspondent à des époques équidistantes* dans la durée de la condensation du Soleil.

38. Si l'on appelle y le rayon équatorial de la nébuleuse solaire, ce rayon, variable avec le temps t, sera représenté, en vertu de la loi du refroidissement, par une expression telle que :

$$y = a + be^{-rt} + b'e^{-r't} + \ldots . \qquad (2)$$

Attribuer à n une suite de valeurs entières dans (1) revient à exprimer que le rayon y occupe successivement les états de grandeur qui correspondent à une suite de valeurs équidistantes de t dans la formule (2), c'est-à-dire à des époques également espacées.

C'est encore par des expressions analogues que sont représentées la vitesse angulaire ω, et la limite théorique L de l'atmosphère, qui lui est liée par la relation $\omega^2 L^3 =$ const. La marche de la fonction L sera donc :

$$L = \alpha + \beta e^{-st} + \beta' e^{-s't} + \ldots . \qquad (3)$$

Or la condition indispensable pour la production d'un anneau planétaire, c'est que y, rayon effectif de la nébuleuse, dépasse la limite théorique L, car alors la couche intermédiaire cesse immédiatement d'appartenir à l'atmosphère. L'abandon des zones équatoriales continue tant que, y et L décroissant simultanément, l'inégalité $y > L$ reste satisfaite. Si y devient égal à L, et puis inférieur, le phénomène cesse, et l'abandon des anneaux est interrompu tant que $y < L$. De sorte que

$$y = L \qquad (4)$$

est en quelque sorte l'équation dont les racines représentent les distances planétaires : ces racines sont les valeurs de t répondant à chaque planète.

En fait, la loi des distances des planètes est donnée assez exactement par l'expression (1), en prenant une ou au plus deux exponentielles. Les développements de y et de L peuvent approximativement être réduits à leurs deux premiers termes : cela revient à dire que les variations de ces éléments décroissent en progression géométrique, quand le temps croît en progression arithmétique.

L'équation (4) se réduit alors à

$$a + be^{-rt} = \alpha + \beta e^{-st} . \qquad (5)$$

La forme de cette équation ne se prête pas à donner pour t une suite de racines correspondant à la série des distances planétaires, du moins tant que l'on considère les coefficients a, b, α, β comme des constantes. Mais en réalité ces coefficients varient, ils peuvent même être considérés comme des fonctions périodiques du temps. Dès-lors on reconnaît que l'équation (5) peut bien avoir un nombre illimité de racines, et ces racines elles-mêmes jouir du même caractère de périodicité que les coefficients dont elles dépendent. Nous allons chercher comment on se rend compte *à priori* de l'existence d'une périodicité plus ou moins régulière de L, d'où résultent pour la différence $y - L$ des valeurs alternativement positives et négatives.

39. *De la périodicité dans l'abandon des anneaux planétaires.* — Si la nébuleuse se condensait d'une manière parfaitement régulière, le décroissement de y et de L serait continu. et de plus L serait constamment inférieur à y. Supposons en effet une masse homogène se contractant régulièrement, de telle sorte qne, son rayon y diminuant, la densité $\rho = \frac{H}{y^3}$ croît en raison inverse du volume. Son moment d'inertie est proportionnel à ρy^5; et la vitesse angulaire qui varie en sens opposé est inversement proportionnelle à y^2. Quant à L, l'équation $\omega^2 L^3 = M$ devient

$$L^3 = ky^4 .$$

Admettons qu'à un certain moment l'atmosphère s'étende jusqu'à sa limite, et soit alors $y = L = L_1$; il s'ensuit $1 = kL_1$, et par conséquent

$$L^3 = \frac{1}{L_1} y^4 .$$

Si donc, à partir de ce moment, y diminue un peu, on aura $\frac{y}{L_1} < 1$, et L deviendra inférieur à y. Ainsi, dans une masse qui se refroidit en restant constamment homogène, y surpasse toujours L, et il y a à chaque instant une zone abandonnée.

Dès-lors, ces zones se suivant sans interruption, il n'y a pas de raison pour qu'elles se séparent d'elles-mêmes et se disposent en groupes principaux destinés à engendrer de grosses planètes. Il est plus probable qu'elles se résoudront définitivement en astéroïdes.

Ces conditions de régularité ont pu exister aux dernières époques de la condensation du Soleil, après la formation de Mercure; mais, puisqu'elles sont incompatibles avec la production des grosses planètes, elles n'ont pas été généralement réalisées.

40. Outre la contraction régulière qu'une masse nébuleuse éprouve par le refroidissement, il faut encore tenir compte de la condensation par dépôt ou précipitation. Admettons que la condensation commence vers les régions centrales: c'est alors L qui diminue plus rapidement que y. Car le résultat du refroidissement des couches internes est un rapprochement vers le centre des parties les plus denses, qui diminue le moment d'inertie du système, augmente la vitesse de rotation, et diminue la limite théorique L, sans influer notablement sur le rayon effectif y. A ce moment, y—L est positif, une couche superficielle se sépare du Soleil et s'écoule vers l'équateur; la disparition de cette couche favorise le refroidissement des couches sous-jacentes, les dimensions réelles de l'atmosphère diminuent, et y décroît plus rapidement que L, qui est à peine influencé par la disparition de ces couches extérieures d'une densité presque nulle. Ainsi, le refroidissement superficiel peut rendre y inférieur à L.

De la sorte, à une période où y surpasse L en succède une autre où, à l'inverse, L surpassant y, le dépôt des zones équatoriales s'arrête immédiatement. Ces alternatives de condensation, s'effectuant d'abord vers le centre, puis à la périphérie, et ainsi de suite, feront prédominer tour à tour la variation de y et celle de L. Chaque fois que y surpassera L, l'abandon d'un anneau équatorial se produira.

Mais ces alternatives deviendront bien plus marquées et plus considérables si nous tenons compte du rôle que jouent, dans la condensation, les courants intérieurs ou traînées elliptiques dont nous avons indiqué l'origine et signalé l'importance.

41. Lorsqu'une couche nébuleuse se déverse à l'équateur, une partie

seulement subsiste sous forme d'anneau et continue à décrire le cercle équatorial ; le reste, par insuffisance de vitesse, rentre dans l'atmosphère, et y pénètre plus ou moins profondément. Par ce rapprochement du centre, le moment d'inertie du système, et par suite L, diminuent. Nous trouvons donc encore que la contraction de la nébuleuse détermine le décroissement de L, à la fois parce que les dimensions réelles diminuent, et parce que la densité augmente dans les régions centrales.

Mais, tandis que le décroissement de y est sensiblement continu, L au contraire varie brusquement et par saccades (*fig.* 7) ; et, bien que, en moyenne, L reste inférieur à y, comme il oscille autour de sa valeur moyenne, il peut dépasser y, et la différence $y — L$ devenir négative, d'où interruption dans la formation des anneaux de Laplace.

Cela tient à ce que, lorsqu'une condensation s'effectue dans les profondeurs de la nébuleuse, l'accroissement correspondant de ω se manifeste d'abord sur la région centrale ; et, à cause de l'immensité de la masse, il est très-difficile à l'accélération de se communiquer de couche en couche jusqu'à la surface. L reste donc sensiblement constant, alors que y ne cesse de décroître. Il arrive un moment où L surpasse y, et le dépôt des zones équatoriales s'arrête quelque temps, jusqu'à ce que, la vitesse angulaire de la couche superficielle s'étant mise d'accord avec celle des couches inférieures, L diminue brusquement et $y — L$ redevienne positif.

Le même effet tend à se produire par suite du développement de chaleur résultant des pertes de vitesse subies par les traînées elliptiques qui pénètrent à l'intérieur de la nébuleuse. Nous reviendrons plus loin sur les phénomènes thermiques dont la nébuleuse est alors le siége ; il suffit de voir que cette production de chaleur dans la partie centrale aura pour effet un transport, du dedans au dehors, de matières qui en s'élevant perdent de leur vitesse angulaire. Ainsi, pendant que la vitesse s'accélère vers le centre du Soleil, elle diminue ou tout au moins n'augmente pas à la superficie : donc L reste constant à la limite de la nébuleuse. Il en sera ainsi tant que la communication du mouvement, s'effectuant de proche en proche, ne sera pas arrivée jusqu'aux dernières couches ; ou bien jusqu'à ce que les couches supérieures, en se contractant, viennent à rencontrer des couches marchant plus vite, et, se mêlant avec elles, prennent une vitesse commune.

Si l'on réfléchit au degré de petitesse de la densité dans une nébuleuse dilatée au point de s'étendre jusqu'à la distance des diverses planètes, densité comparable par sa ténuité à celle des queues de comètes, on comprendra la peine qu'a cette masse à tourner tout entière d'un mouvement commun, et l'impossibilité pour une accélération de ce mouvement de se transmettre d'un bout à l'autre. Par ces considérations, on voit bien que L ne saurait décroître d'une manière continue.

42. Telle me paraît être l'origine des alternatives qui, en se reproduisant, déterminent la périodicité de L, et celle de $y - L$. Cette périodicité n'est pas une loi absolument générale, puisque le Soleil a cessé d'y satisfaire en deçà de Mercure, et que les petites planètes, Mars, la Terre, Vénus et Mercure, n'en ont joui à aucune époque. Il est probable que, chez ces planètes, y a constamment surpassé L, et que dans tout le cours de leur condensation l'abandon des zones équatoriales a été continu, ce qui a mis obstacle à la formation de satellites considérables. Et nous n'exceptons pas la Terre : car son satellite a une origine distincte, ayant pris naissance dans le sein même de la nébuleuse terrestre, et non par la réunion et la condensation d'anneaux déjà abandonnés.

La périodicité de L, quelle qu'en soit la cause, s'est donc manifestée pendant une partie notable de la condensation du Soleil et des grosses planètes. Combinée avec le décroissement continuel et en progression géométrique des dimensions de la nébuleuse solaire, elle explique la loi des distances planétaires. La diminution de y, conformément aux lois du refroidissement, a introduit la forme exponentielle qui caractérise la loi de Bode et les formules analogues pour les satellites. Ces diverses formules indiquent l'existence de corps planétaires aux distances qui correspondent à des valeurs entières de l'indice n; et comme cet indice correspond au temps t dans la loi du décroissement de y, nous sommes autorisé à penser que l'abandon des anneaux planétaires s'est produit à des intervalles de temps égaux : les distances planétaires répondent à des époques équidistantes dans l'histoire du refroidissement de la nébuleuse.

43. Nous avons dit, en commençant ce chapitre, que la loi de Bode

n'est guère en défaut que pour les deux planètes extrêmes dans l'ordre de formation, Mercure et Neptune. Encore peut-on trouver, pour cette dernière, une explication tirée du rapport simple qui existe entre le temps périodique de cette planète et celui d'Uranus, qui en est la moitié. On va voir, dans l'étude des satellites, que ces rapports simples ont toujours eu une tendance à se produire. On dirait qu'ils ont aidé à la formation des astres entre lesquels de pareilles relations existaient à peu près, ou étaient susceptibles de se réaliser. Il est donc naturel de supposer que la zone qui devait donner naissance à Neptune, et celle d'Uranus, ayant coexisté, se sont influencées et troublées mutuellement; et ces anneaux seuls ont subsisté dont les vitesses angulaires respectives étaient sensiblement comme 1 : 2. Ce rapport établi peu à peu entre les anneaux persiste aujourd'hui entre les durées de révolution des planètes qui en sont issues.

44. *Distances des satellites à leur planète.* — Lorsqu'on examine attentivement le tableau de ces distances, on y reconnaît une régularité qui permet de les lier entre elles à l'aide de progressions analogues à celles des planètes. Ainsi, pour Jupiter, la formule

$$3 + 3.2^{n-1}$$

donne, pour $n = 1, 2, 3, 4$, les nombres 6, 9, 15, 27. Ce sont les distances des satellites de Jupiter, sauf des différences insignifiantes dans ce genre de recherches.

45. Il est plus difficile de reconnaître une loi chez les satellites de Saturne. En voici pourtant une que j'ai indiquée en 1847, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences [1]. Elle consiste à remplacer dans la formule des planètes les puissances successives de 2 par celles de $\sqrt{2}$. Si l'on prend

$$d = 1,5 + 1,4\,(\sqrt{2})^n\ ,$$

on trouve, pour les diverses valeurs de n,

---

[1] *Note sur la loi de Bode.* 1853. — *Note sur la distance des satellites.* (Académie des Sciences et Lettres de Montpellier; Procès-verbaux de la section des Sciences, séance du 13 juillet 1854.)

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d =$	3,5	4,3	5,4	7,1	9,4	12,6	17,2	23,8	33	46	64,5
	3,5	4,3	5,3	6,8	9,5	»	»	22,8	27	»	64,4

Comparant ces nombres aux distances des satellites, qui sont écrites au-dessous, nous remarquons que les distances des sept satellites anciennement connus sont très-convenablement représentées ; seulement il y a des lacunes, c'est-à-dire des termes de la série auxquels ne correspond aucun astre visible. Quant à l'anneau de Saturne, on observe qu'il occupe l'intervalle compris entre $n = 0$, qui donne 2,9, et $n = -\infty$, d'où 1,5.

Depuis l'époque où j'indiquai cette loi, un huitième satellite, découvert par M. Bond et M. Lassell, est venu remplir une des lacunes ; mais sa distance 27 s'écarte assez de la distance calculée 33. Il se peut que les autres lacunes soient occupées par des satellites encore à découvrir, ou que leur petitesse nous dérobera toujours.

Mais voici une remarque qui peut rendre compte de l'absence de quelques termes dans la série des satellites ou de leur écart par rapport à la position normale. Les satellites observés sont précisément ceux dont les durées de révolution présentent des relations simples. Ainsi, la période du troisième satellite est double de celle du premier, et la période du quatrième double de celle du deuxième. La période du huitième est quintuple de celle du sixième, et la période du septième (découvert en 1848) est aussi quintuple de celle du cinquième.

46. Les anneaux, ou l'ensemble des courants elliptiques qui constituent une zone, forment un système instable qui tend, ou vers la destruction ou vers un arrangement différent, lequel peut être un nouvel anneau ou bien un sphéroïde planétaire. Les seuls arrangements présentant des garanties de durée paraissent être ceux qui réalisent les rapports numériques dont il s'agit. Ceux-là subsisteront, et vers eux s'accumulera la substance de ceux qui disparaissent : d'où production d'astres à masse considérable dans ces régions privilégiées. C'est aussi à peu près de cette manière que Laplace explique l'établissement du rapport simple qui existe entre les moyens mouvements des satellites de Jupiter.

Les mêmes raisonnements justifient notre supposition (n° 43) que la place de Neptune, bien en deçà de celle que lui assignerait la loi de Bode, tient à ce que la condensation des anneaux correspondants à Neptune et à Uranus s'est opérée de façon à réaliser entre leurs révolutions le rapport de 1 à 2. Loin d'être un effet du hasard, c'est ce rapport qui a fixé les positions respectives des deux astres. Sous leur influence réciproque, les anneaux dont les révolutions n'étaient pas en rapport simple se sont détruits ou modifiés, et les autres se sont respectivement groupés aux distances moyennes 192 et 300, qui répondent à des périodes de 84 et 168 ans. Tous les groupes de satellites offrent des relations de ce genre, qu'on doit regarder comme liées aux conditions d'existence de ces astres et ayant même favorisé leur développement.

47. Si l'on voulait pousser plus loin la recherche des analogies numériques dans le système solaire, on remarquerait que, en comptant la distance de chaque planète à partir de Mercure, ce qui revient à supprimer le premier terme de la formule, les intervalles planétaires sont représentés par

$$3 . 2^{n-1}$$

qui représente aussi les distances des satellites de Jupiter au plus récent d'entre eux.

Pour le système Saturnien, les distances au centre sont exprimées approximativement par

$$1 + (\sqrt{2})^{n+1},$$

le rayon de la planète étant pris pour unité. Ce qui est digne d'attention, c'est le facteur $\sqrt{2}$, raison de la progression des satellites de Saturne, au lieu de 2, raison de la progression planétaire et de celle du système de Jupiter. Nous n'insisterons pas sur ces particularités, qui pourraient cependant se rattacher à quelque loi physique encore ignorée.

48. *De l'intervalle occupé par les satellites.* — Les formules que nous venons d'indiquer sont utilisées surtout comme procédé mnémonique; elles ont l'inconvénient de donner un nombre illimité de termes, et de ne pas indiquer lequel de ces termes répond au premier satellite, lequel au der-

nier. J'ai cherché [1] s'il n'existait pas pour chaque planète quelque loi relative à l'intervalle qu'occupent les satellites; en d'autres termes, si la distance du satellite le plus voisin et celle du plus éloigné ne sont pas en relation avec les éléments de leur planète.

Pour ce qui est d'une *limite supérieure* de ces distances, nous avons indiqué (n° 22) le principe qui peut servir à la poser. L'atmosphère d'une planète, dans son état initial, sous l'action de la force centrifuge et de l'attraction solaire, prend la figure d'un sphéroïde allongé suivant la direction du Soleil. La différence $R' - R''$ des deux axes équatoriaux dépend de divers éléments, mais elle diminue à mesure que la rotation devient plus rapide. Ayant calculé (n° 25), pour les diverses planètes, ce qu'était cette différence au moment où la nébulosité planétaire s'étendait jusqu'à l'orbe du satellite le plus éloigné, nous avons trouvé que ces valeurs de Ω sont fort petites; et, par une coïncidence remarquable, elles sont presque égales ou du moins du même ordre de grandeur. J'en ai conclu qu'il n'a pu se former de satellites tant que Ω est resté supérieur à une certaine quantité.

49. Cette induction étant admise, on aura une limite supérieure de la distance des satellites en cherchant la valeur de R' qui rend Ω égal à la plus grande valeur que nous avons trouvée pour cette différence, celle qui convient à Saturne : c'est 4,5 rayons terrestres.

Le calcul a été fait au n° 27. Pour les petites planètes, ces valeurs de R' sont :

Mercure.	Vénus.	La Terre.	Mars.
55	53	64	98

Voici, pour les grosses planètes, ces distances limites comparées à la position des satellites les plus éloignés :

Jupiter.	Saturne.	Uranus.	Neptune.
49	64,4	155	200
27	64,4	91	15

Pour Saturne, les deux nombres coïncident, comme cela devait être. Pour

[1] *Note sur la distance des satellites*. 1854.

Jupiter et Uranus, la différence atteint à peine l'intervalle de deux satellites consécutifs. Mais, pour Neptune, l'espace où l'on peut espérer de lui découvrir des satellites est fort considérable.

50. On obtient une *limite inférieure* de la distance des satellites en remarquant que le Soleil ne possède pas de planète, ni aucune planète de satellites, en deçà de la limite actuelle de l'atmosphère théorique, c'est-à-dire de la distance X, où la force centrifuge équilibre aujourd'hui la gravité. Pour le Soleil, c'est 0,17 ; or la planète la plus voisine, Mercure, est à la distance plus que double 0,39.

Quant aux planètes qui ont des satellites, la 3e loi de Képler fait connaître immédiatement la distance où devrait se trouver un satellite pour que sa révolution égalât la durée actuelle de rotation de la planète, savoir $0^j,997$ pour la Terre, $0^j,413$ pour Jupiter, $0^j,437$ pour Saturne. Exprimant ensuite ces distances en rayons de la planète, on trouve pour X :

La Terre.	Jupiter.	Saturne.
6,6	2,29	1,99

Ces nombres sont trop inférieurs aux distances des satellites pour constituer une limite utile à considérer.

Substituons à ces nombres leurs carrés X^2, nous obtiendrons des résultats beaucoup moins différents de la distance du satellite le plus voisin. Les voici, mis en regard :

44	5,26	3,96
60	6,05	3,35

Ce sont ces carrés que nous adopterons comme représentant empiriquement la limite inférieure des distances des satellites.

Ces limites inférieures, calculées pour toutes les planètes et comparées aux limites supérieures obtenues dans les nos précédents, fournissent le tableau suivant, pour les petites planètes :

Mercure.	Vénus.	La Terre.	Mars.
51	40	44	44
55	53	64	98

et pour les grosses planètes :

Jupiter.	Saturne.	Uranus.	Neptune.
5,3	3,9	»	»
48,6	64,4	155	200

Tels sont les intervalles que les satellites ont pu occuper. Leur examen suggérerait diverses remarques sur lesquelles nous n'insisterons pas ; il nous suffit d'avoir signalé cet ordre d'idées faciles à développer.

51. La limite inférieure dont nous venons de parler n'a pu être calculée pour Uranus et Neptune, la durée de leur rotation n'étant pas connue. Mais on peut traiter la question en sens inverse, et admettre *à priori*, par analogie avec Jupiter et Saturne, que X^2 diffère peu de la distance du satellite le plus voisin. X une fois connu, la durée de rotation s'ensuivra.

Considérons d'abord Uranus. Le premier satellite (reconnu par Lassell) est à la distance de 7,44 rayons de la planète, avec une période de $2^j,52$. Nous poserons donc $X^2 = 7,44$, d'où $X = 2,73$; on en conclut $t = 0^j,6$ pour la rotation d'Uranus.

Quant à Neptune, on ne lui connaît positivement qu'un satellite, dont la période est $5^j,9$, et la distance 13,1 rayons ; ce dernier nombre est du reste peu précis, à raison de l'incertitude du diamètre de la planète. Posons $X^2 = 13,1$, d'où $X = 3,6$, et $t = 0^j,7$. La durée de rotation de Neptune serait donc de $0^j,7$. De ces considérations empiriques, mais assez plausibles, il résulte que les quatre grosses planètes tournent sur elles-mêmes à peu près dans le même temps, et que ce temps diffère peu d'un demi-jour.

VI.

DE L'ORIGINE DE LA LUNE.

52. Parmi les planètes inférieures à Jupiter, la Terre seule possède un satellite. Les analogies développées au chapitre précédent semblent indiquer pourquoi les circonstances propres à la production de ces astres secondaires ne se sont pas rencontrées chez les petites planètes : l'intervalle qu'ils pourraient occuper, tel qu'on l'a calculé au n° 50, est en effet bien restreint.

S'il s'en est formé, c'est dans des conditions autres que celles qui ont donné aux grosses planètes de nombreux satellites; aussi la Lune se présente-t-elle à divers points de vue comme un satellite exceptionnel. Elle se distingue par la grandeur de ses dimensions et de sa masse comparées à celles de la Terre, par l'excentricité de son orbite, surtout par sa distance à la Terre. Saturne et peut-être Uranus en ont un aussi éloigné, comparativement au rayon de la planète, mais c'est alors le dernier d'une série de satellites. Ici le satellite est unique : si la Terre en a d'autres, ils sont très-petits, et appartiennent à un anneau secondaire formé de ces corps dont les débris, tombant quelquefois sur notre globe, prennent le nom d'aérolithes.

La grande distance de la Lune (60 rayons terrestres) a été considérée par quelques personnes comme une objection à la théorie de Laplace. Car la première condition imposée par cette théorie, c'est qu'à une certaine époque la nébuleuse terrestre se soit étendue au-delà de la Lune. L'atmosphère de la Terre a dû atteindre cette distance au moment où sa durée de rotation était de $27^j,5$, durée de la révolution lunaire. Ayant alors abandonné la Lune, elle s'est contractée peu à peu, en même temps que la durée de la rotation diminuait jusqu'à devenir égale à un jour.

Or, si l'on veut calculer la plus grande distance où ait jamais atteint l'atmosphère terrestre, et si l'on procède comme l'a fait Laplace (*Système du monde*, liv. IV, chap. X) dans une question analogue (quand il cherche la limite de l'atmosphère lunaire), on trouve que cette distance serait les trois quarts seulement de la distance de la Terre à la Lune. Il serait donc faux que l'atmosphère de la Terre se fût jamais étendue jusqu'à la Lune. Voici comment j'ai levé cette difficulté [1].

53. « La limite de l'atmosphère de la Lune, dit Laplace, est au point où la force centrifuge due au mouvement de rotation, jointe à la force attractive de la Terre, est en équilibre avec l'attraction du satellite.» Mais il y a une précaution à prendre qui a échappé à Laplace : il faut dans ce calcul distinguer entre la pesanteur *absolue* vers la Lune, et la pesanteur *relative*. L'at-

---

[1] *Note sur la théorie des atmosphères*. 1851. — *Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes*, nº 45. 1854.

mosphère lunaire se termine forcément à la distance où la pesanteur vers la Lune est égale à zéro, puisqu'au-delà toute molécule atmosphérique, au lieu de peser vers la Lune, pèse vers la Terre, et doit ainsi s'écarter du satellite et cesser de lui appartenir. Seulement, c'est ici une pesanteur relative, je veux dire qui résulte de la différence entre l'action de la Terre sur la molécule et son action sur le centre de la Lune : en effet, la différence de ces attractions détermine réellement la tendance de la molécule vers le centre, tandis que leur partie commune imprime au système un mouvement commun, sans modifier en rien la forme de l'atmosphère.

Telle est la vraie manière d'opérer : on trouve ainsi que la limite de l'atmosphère lunaire à l'équateur est à un sixième environ de la distance de la Lune à la Terre, tandis que la marche suivie par Laplace lui donne un dixième seulement.

54. De même, en appliquant notre remarque à l'atmosphère de la Terre, limitée par l'attraction du Soleil et par la force centrifuge, on est conduit à poser l'équation

$$\frac{m}{D^2} = \frac{M}{(a-D)^2} - \frac{M}{a^2} + \frac{4\pi^2 D}{t^2}\,; \qquad (1)$$

en appelant m, M les masses de la Terre et du Soleil, a leur distance, D la distance limite demandée, t la durée de la rotation de l'atmosphère terrestre à l'époque pour laquelle on calcule D. Laplace néglige à tort le terme $-\frac{M}{a^2}$, et il écrit simplement

$$\frac{m}{D^2} = \frac{M}{(a-D)^2} + \frac{4\pi^2 D}{t^2}\,. \qquad (2)$$

Partons de l'équation exacte, et posons, comme nous l'avons fait au n° 20,

$$m = \mu M\,, \qquad T^2 = \gamma t^2\,,$$

T étant la durée de révolution de m autour de M. A cause de

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = M + m\,,$$

l'équation se ramène aisément à

$$\frac{(2a-D)\,D^3}{a^2(a-D)^2} = \mu - \gamma\,(1+\mu)\,\frac{D^3}{a^3}\,.$$

Comme $\frac{D}{a}$ sera toujours fort petit, on peut réduire le premier membre à $\frac{2D^3}{a^3}$; d'où résulte

$$D = a \sqrt[3]{\frac{\mu}{2 + \gamma (1 + \mu)}}, \qquad (3)$$

et plus simplement, à cause de la petitesse de μ,

$$D = a \sqrt[3]{\frac{\mu}{2 + \gamma}} \cdot \qquad (4)$$

Cette formule détermine, pour toute valeur de γ, la limite d'une atmosphère, dans le sens du corps troublant : c'est ce que plus haut (n° 20) nous avons appelé R'.

55. Si la vitesse de rotation d'une planète, caractérisée par les valeurs de μ et a, a augmenté par degrés depuis zéro jusqu'à sa valeur actuelle, γ a augmenté en même temps, et D a diminué, depuis

$$D = a \sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}, \qquad (5)$$

qui répond à $\gamma = 0$. C'est la plus grande distance à laquelle on puisse admettre que l'atmosphère d'une planète se soit jamais étendue.

Lorsque la rotation était égale à la translation, ce qui a eu lieu probablement à l'origine de la nébuleuse planétaire, on avait $\gamma = 1$, et

$$D = a \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \cdot \qquad (6)$$

Appliquons cette dernière formule à la Terre, pour laquelle $\frac{1}{\mu} = 325\,000$, $a = 23\,500$: nous trouvons $D = 237$ rayons terrestres, ou quatre fois la distance de la Terre à la Lune. L'atmosphère terrestre englobait alors l'orbite lunaire et s'étendait bien au-delà.

Les formules du n° 18, qui se rapportent à l'hypothèse $\gamma = 1$, indiquent qu'à ce moment l'atmosphère de la Terre avait les dimensions suivantes :

$$R' = 237, \qquad R'' = 158, \qquad R = 151 ;$$

ou, en prenant pour unité la distance de la Lune,

$$R' = 3{,}95\ , \qquad R'' = 2{,}63\ , \qquad R = 2{,}52\ .$$

Quant à l'équation inexacte (2), transformée de la même manière, elle devient

$$\frac{D^2}{(a-D)^2} = \mu - \gamma(1+\mu)\frac{D^3}{a^3}\ ,$$

qu'on peut réduire à

$$\frac{D}{a} = \sqrt{\mu - (2+\gamma)\mu\sqrt{\mu}}\ , \qquad (7)$$

et même approximativement à

$$D = a\sqrt{\mu}\ . \qquad (8)$$

Dans le cas de la Terre, elle donne $D = 41$, ou les deux tiers seulement de la distance lunaire. La nébuleuse terrestre n'aurait donc jamais pu s'étendre à la Lune : ce satellite échapperait d'une manière absolue à l'hypothèse de Laplace sur la formation des satellites aux dépens de leur planète.

56. En substituant à cette équation incorrecte la considération de la pesanteur relative, nous reconnaissons au contraire que notre planète a pu envelopper la Lune dans son atmosphère, et toute difficulté disparaît. Depuis l'époque où la rotation de la Terre s'exécutait en un temps égal à sa révolution, cette rotation s'est accélérée par degrés. Au moment où elle s'est trouvée égale à $t = 27^j{,}3$, d'où $\frac{T}{t} = 13{,}36$ et $\gamma = 178{,}5$, on avait $D = 60$ rayons. C'est vers cette distance que s'est formée la Lune. L'atmosphère terrestre présentait alors la forme d'un sphéroïde à axes inégaux : le plus grand, dirigé vers le Soleil, était environ

$$R' = 60\ .$$

L'axe moyen perpendiculaire à celui-ci, calculé au moyen de l'équation en w du n° 20, qui donne $w = 0{,}932$, était

$$R'' = 56\ .$$

Enfin l'équation en v du même n° donne $v = 0{,}666$; d'où l'axe des pôles

$$R = 40\ .$$

Cela veut dire que, tandis que la Terre tournait sur elle-même en $27^j,3$, son atmosphère était très-aplatie vers les pôles; mais elle était de plus soumise à une marée ayant pour effet de l'allonger constamment dans le sens du diamètre dirigé vers le Soleil, et de la rétrécir dans le sens perpendiculaire. La période de cette marée est $13^j,7$; sa grandeur, mesurée par la différence $R'—R''$, est de quatre rayons terrestres, soit un dixième du rayon polaire. Sous l'influence de cette énorme marée, non-seulement la nébuleuse terrestre ne saurait être assimilée à un sphéroïde de révolution, mais elle se trouve, surtout à l'équateur, dans un état continuel de déformation.

57. On se demande comment une atmosphère ainsi troublée a pu donner naissance à la Lune. Dans les circonstances que nous venons de décrire, on ne saurait concevoir un dépôt régulier d'anneaux circulaires suivant le plan de l'équateur terrestre, soit au dehors, soit au dedans de l'atmosphère. Nous avons déjà signalé au n° 22 cette difficulté, et reconnu l'impossibilité de grands anneaux autour d'une nébuleuse où la marée solaire n'est pas devenue à peu près insensible, parce que l'écoulement du fluide en excès, loin de s'opérer sur tout le contour de l'équateur, n'a lieu que par les deux sommets du grand axe.

S'il y a du fluide abandonné, il se distribuera en amas distincts et isolés, pouvant ultérieurement se transformer en astéroïdes, petits satellites de la Terre irrégulièrement dispersés, destinés à nous rester inconnus si des perturbations exceptionnelles ne les amènent à rencontrer la Terre sous forme d'aérolithes.

D'autres parties du fluide délaissé par l'atmosphère y rentreront, parce que leur vitesse est insuffisante comme émanant des régions polaires. Ou bien ces nébulosités iront se perdre et se dissoudre à l'intérieur de la nébuleuse, ou bien, s'accumulant en divers points, elles s'y condenseront en noyaux discontinus, pour être abandonnés plus tard, lors du retrait de l'atmosphère qui les enveloppe.

58. *Formation de la Lune à l'intérieur de la nébuleuse terrestre.* — Il a pu arriver aussi exceptionnellement, et telle est l'origine probable de la Lune, qu'un amas de vapeurs déjà refroidies s'étant formé au dedans

de la nébuleuse terrestre, dans la région équatoriale et à une certaine profondeur, cet amas soit devenu un centre de condensation autour duquel se sont groupés d'autres amas semblables. De cette agglomération est résultée, dans l'atmosphère même de la Terre, une nouvelle nébuleuse, origine de la Lune.

Cette nébuleuse a nécessairement participé, dès le début, à la circulation du fluide atmosphérique dans lequel elle nageait, pour ainsi dire; elle a dû prendre et conserver aussi un mouvement de rotation, égal à son mouvement de translation, autour d'un axe parallèle à l'axe de rotation de l'atmosphère.

Le noyau lunaire grossit peu à peu par la condensation des matières voisines, et par cela même il tend à devenir indépendant du fluide atmosphérique qui l'enveloppe et l'entraîne avec lui : car sa densité augmente, et son adhésion au fluide environnant diminue de plus en plus. Pendant ce temps, le système entier continue à se contracter ; et lorsque dans son mouvement de retrait la limite théorique L arrive au noyau, celui-ci se détache de l'atmosphère au lieu de la suivre, et continue désormais son mouvement en toute liberté.

Il est facile de prévoir à quel moment de la révolution lunaire s'effectuera cette séparation du noyau et de l'atmosphère. Ce sera lors d'une syzygie: car le satellite S est alors le plus possible dans la direction OY du Soleil (*fig.* 8), et le grand axe $OA = R'$ de la nébuleuse terrestre coïncide lui-même avec cette direction, de sorte que la Lune est plongée dans le ménisque dû à la marée solaire. Supposons qu'à cet instant la limite atmosphérique L soit en A, et par conséquent atteigne presque en S ; comme le système entier tourne autour de l'axe terrestre O (perpendiculaire au plan de la figure), au bout de peu de temps il arrivera que, la direction OS' de la Lune ayant changé, le rayon atmosphérique OA' correspondant à cette nouvelle direction sera moindre que OA et pourra même être inférieur à OS. Puisque le noyau lunaire n'a plus avec le fluide assez d'adhérence pour être obligé de le suivre, il restera en dehors de l'atmosphère, et sa rupture avec elle sera accomplie.

Ainsi se trouve rattachée la formation de la Lune aux deux points sur lesquels nous insistons particulièrement: 1° écoulement à l'intérieur de l'atmosphère d'une partie du fluide qu'elle délaisse, et possibilité d'une condensation s'effectuant dans cette atmosphère ; 2° influence du Soleil sur la nébuleuse planétaire, déterminant une marée ou allongement de la surface suivant le rayon solaire.

59. Ces déductions de notre théorie sont d'accord avec les conclusions d'un savant Mémoire [1] publié en 1869 par M. Charles Simon. L'auteur s'est proposé de déterminer les conditions initiales auxquelles la Lune a dû satisfaire pour que son mouvement de rotation devînt tel que nous l'observons. Ce mouvement présente deux particularités bien remarquables : la vitesse de rotation est constamment égale à la moyenne vitesse de révolution, et en outre le nœud ascendant de l'équateur coïncide avec le nœud descendant de l'orbite. Ces deux lois ont dû être réalisées dans l'état initial, mais elles doivent de plus être permanentes, c'est-à-dire qu'une fois établies il faut qu'elles se maintiennent indéfiniment.

La première loi exige seulement que cette égalité des deux mouvements ait eu lieu à l'origine, et pour cela que le grand axe du sphéroïde lunaire fût alors dirigé vers la Terre. Or, cet allongement du sphéroïde est une conséquence naturelle de sa fluidité ; de là une tendance du satellite à tourner constamment les mêmes points de sa surface vers le centre de la planète. Le renflement une fois établi, l'action de la Terre a produit une légère oscillation du grand axe, et finalement l'égalité absolue des deux mouvements.

La seconde loi, plus difficile à réaliser, exige que, au moment où les nœuds ont commencé à coïncider, l'inclinaison de l'orbite ait satisfait à une certaine équation, sans quoi cette inclinaison et la direction des nœuds subiraient aujourd'hui une oscillation que les observations n'indiquent pas.

60. Après avoir défini les conditions nécessaires pour assurer les deux lois de la rotation lunaire, M. Simon cherche comment elles ont pu être satisfaites, et il trouve qu'elles l'ont été complètement si les choses se sont passées de la manière suivante.

---

[1] *Mémoire sur la rotation de la Lune.* (*Annales scientifiques de l'École normale*, tom. VI.)

Dans la nébuleuse terrestre, à une époque où l'inclinaison de son équateur sur le plan de l'écliptique était fort petite, un noyau s'est formé au voisinage de l'équateur (*fig.* 9), mais un peu en dehors des deux tropiques tt, $t't'$. Il est resté quelque temps plongé dans l'atmosphère, entraîné par elle et la suivant dans tous ses mouvements. A mesure que, par l'agglomération dont il a été le centre, et par sa condensation croissante, ce noyau a augmenté de masse et de densité, sa cohésion avec le fluide enveloppant a diminué, si bien qu'il lui est devenu comme étranger. Et ce fluide continuant à se contracter, il s'en est détaché, a cessé de le suivre, et a commencé à décrire autour du foyer O une orbite indépendante, déterminée par sa gravité et par la vitesse qu'il possédait au moment de la séparation.

Or, pour que, à ce moment, la coïncidence des nœuds ait été réalisée, et en même temps l'équation de condition qui devait en assurer le maintien, il suffit, d'après M. Simon, que la rupture ait eu lieu lorsque le Soleil se trouvait aussi près que possible du zénith ou du nadir de la Lune, c'est-à-dire au moment de l'une des syzygies et dans le voisinage de l'un des solstices : le noyau lunaire étant par exemple en S (*fig.* 9), et le Soleil sur la droite YY', d'un côté ou de l'autre indifféremment. C'est juste le moment où la Lune se trouvait le plus rapprochée du ménisque de la marée solaire, et où notre théorie (nº 58) faisait prévoir qu'en effet la Lune abandonnerait l'atmosphère terrestre.

Nous n'insisterons pas davantage, renvoyant pour plus de détails au beau travail de M. Ch. Simon, que nous aurons encore occasion de rappeler. Le point essentiel était de montrer comment l'étude directe du mouvement de la Lune, abstraction faite de tout système cosmogonique, amène nécessairement à rattacher l'origine de ce satellite à l'hypothèse de Laplace, et n'y introduit d'autres modifications que celles que nous avons nous-même proposées : condensation à l'intérieur de la nébuleuse, et influence de la marée solaire.

61. *De l'excentricité de l'orbe lunaire.* — Reprenons la *fig.* 8, qui représente l'équateur de la nébuleuse terrestre. Puisque le demi-grand axe OA a été supposé égal à la limite théorique L, l'orbite que la Lune S se met à décrire autour de la Terre, au moment de sa séparation, sera à peu près,

mais non pas exactement, circulaire. Son excentricité résulte de cette circonstance que, au point A la force centrifuge, jointe à l'attraction solaire, équilibre la pesanteur vers le centre O. Au point S, *à fortiori*, la force centrifuge est moindre que la pesanteur, de sorte que S (ou plus exactement le point où la Lune abandonnera l'atmosphère) sera l'*apogée lunaire*. A partir de ce point, le satellite devenu libre se rapproche de la planète.

Nous conclurons de là que la séparation de la Lune avec la nébuleuse terrestre s'est accomplie lorsque OS égalait environ 63 rayons, et non pas 60, comme nous l'avions admis jusqu'ici, en nombre rond. Supposons d'abord que le point de départ de la Lune soit en A (*fig.* 8), de sorte que $OA = OS = 63$. Ce point correspondant à l'apogée, le demi-grand axe sera moindre ; cherchons quelle sera l'excentricité. Si l'on calcule, pour cette position, l'influence du Soleil sur la Lune, et si on la compare à l'attraction terrestre, on trouve qu'elle en est $\frac{1}{80}$ à peu près. Donc, au moment où la Lune s'est trouvée libre, le carré de sa vitesse était les $\frac{79}{80}$ de ce qu'il aurait dû être pour lui faire décrire un cercle autour de O. D'après la théorie du n° 10, cette orbite sera une ellipse de foyer O, l'apogée en A, et l'excentricité $e = 1 - h^2 = \frac{1}{80}$.

Ne supposons plus maintenant que le point de départ S de la Lune se confonde avec le point A ; et, par exemple, OS étant toujours égal à 63, admettons que la limite $OA = L = 64$. A cette distance correspond une durée de révolution égale à $29^j,9$, d'où $\gamma = \frac{T^2}{t^2} = 149$. Les formules du n° 20 donnent alors $v = 0,666$, $w = 0,921$, d'où, en nombres entiers,

$$R' = 64, \qquad R'' = 59, \qquad R = 43.$$

Tels étaient les axes du sphéroïde ou de l'atmosphère terrestre lorsque la Lune, placée en S, s'en est détachée.

La limite théorique de l'atmosphère étant en A, la vitesse en ce point est $\sqrt{\frac{M}{64}}$. Jusqu'au moment de la séparation, la Lune participe au mouvement commun de rotation, dont la vitesse en S est $\frac{63}{64}\sqrt{\frac{M}{64}}$. D'ailleurs, pour que S décrive un cercle autour de O, il faudrait que sa vitesse initiale fût $\sqrt{\frac{M}{63}}$. La vitesse effective est donc insuffisante : son rapport à la précédente est

$$h = \frac{63\sqrt{63}}{64\sqrt{64}}, \quad \text{d'où} \quad h^2 = 0{,}954\,;$$

$e = 1 - h^2 = 0{,}046$. Le satellite décrira une ellipse ayant son apogée en S et une excentricité de $\frac{1}{22}$.

Ce nombre diffère peu de l'excentricité réelle, qui est $\frac{1}{18}$, et il serait facile de choisir la position initiale du point S, de manière à la retrouver exactement. Mais, comme cet élément de l'orbite a pu varier depuis l'origine, il serait illusoire de rechercher ici une plus grande concordance entre la théorie et les données de l'observation. En effet, bien que sortie de la nébuleuse, la Lune a encore traversé plusieurs fois des portions du fluide atmosphérique dont la résistance a eu pour résultat d'augmenter la vitesse et de diminuer le grand axe. Contentons-nous d'avoir montré la cause de la grande excentricité de l'ellipse lunaire : elle tient à ce que le satellite s'est formé à l'intérieur du ménisque résultant de la marée solaire, un peu en deçà de la limite L, et à ce que son point de départ S a coïncidé avec l'apogée de l'orbite.

VII.

DE L'ANNEAU DE SATURNE.

62. Ce corps, unique dans le système solaire, est considéré par Laplace comme une preuve encore subsistante, un témoin des phases par lesquelles ont passé les zones délaissées par le Soleil, avant de se transformer en planètes. Plusieurs questions d'un haut intérêt se posent d'elles-mêmes à l'occasion de ce singulier appendice de la planète Saturne.

Pourquoi la nébulosité qui a formé l'anneau ne s'est-elle pas agglomérée en un sphéroïde pareil à tous les satellites ? — Quelle est la constitution de l'anneau, l'état de la matière qui le compose ? — Comment expliquer la distance si faible qui le sépare de Saturne, anomalie sans exemple chez les autres planètes ?— Enfin, quelle est l'origine de l'anneau?

63. *De l'impossibilité d'un satellite à la distance où est l'anneau.* — Cette impossibilité résulte des considérations indiquées au chap. III de cet Essai, pour expliquer l'absence d'une grosse planète dans la région qui sépare Mars de Jupiter. Il n'est pas toujours possible à un fluide homogène de se maintenir en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde. En particulier, s'il s'agit d'un satellite, c'est-à-dire d'une masse circulant autour d'un corps central, en un temps égal à celui de sa rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'orbite, il se présente un problème intéressant, traité dans mon *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné*[1].

Parmi les figures qui dans ces conditions peuvent convenir à l'équilibre, il en est deux qui sont allongées suivant le rayon vecteur de la planète, et deux autres allongées suivant une perpendiculaire à ce rayon, menée dans le plan de l'orbite ; l'équilibre de ces dernières ne saurait être qu'instable, et nous n'en dirons rien ici. Lorsque la vitesse angulaire de la masse fluide est inférieure à une certaine limite, l'un des deux premiers ellipsoïdes diffère peu d'une sphère, l'autre est une sorte d'aiguille allongée vers la planète. La vitesse augmentant, ces figures se rapprochent : l'aplatissement de la première croît, l'allongement de la seconde diminue. Elles coïncident quand la vitesse atteint la limite dont on vient de parler ; au-delà, ces figures n'existent plus.

Si le satellite est très-petit relativement à sa planète, la condition pour l'existence des figures stables s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} < 0,046,$$

ω désignant la vitesse angulaire, ρ la densité du fluide. Mais, de l'égalité entre les deux mouvements de rotation et de translation sur une ellipse d'axe $2a$, il résulte :

[1] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, séance du 18 juin 1849.

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{M(1+\mu)}{a^3},$$

μ étant la masse du satellite comparée à celle M de la planète. Et comme ce rapport μ est très-petit,

$$\frac{M}{2\pi\rho a^3} < 0,046,$$

Remplaçons M par $\frac{4}{3}\pi r^3\delta$, r et δ étant le rayon et la densité moyenne de la planète, l'inégalité devient

$$\frac{a}{r} > 2,44\sqrt[3]{\frac{\delta}{\rho}}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose les deux astres de même densité, $\delta = \rho$, et la condition d'existence du satellite est simplement

$$a > 2,44\,r.$$

De là, cette conclusion remarquable : à une distance de la planète plus petite que deux fois et demie son rayon, un satellite de même densité, à l'état fluide, ne saurait se maintenir sous forme elliptique.

64. Après avoir établi ce théorème dans le Mémoire déjà cité de 1849, n° 23, je fais observer que cette distance limite 2,44 est à peine supérieure au rayon externe de l'anneau, exprimé en rayons de la planète. Ce qui démontre que la matière circulant autour de Saturne, dans la région de l'anneau, n'a pu s'agglomérer en un corps unique.

Au contraire, à la distance 3,35, tant soit peu au-dessus de la limite, apparaît un premier satellite. Son aplatissement, déduit de la théorie développée dans mon Mémoire, serait $\frac{1}{33}$ dans l'hypothèse de l'homogénéité, et l'allongement vers Saturne $\frac{1}{7}$. Ces chiffres supposent le satellite très-petit et de même densité que la planète ; si ces conditions n'étaient pas remplies, ils subiraient quelques modifications que mes formules permettent de calculer.

M. Daniel Vaughan (de Cincinnati) s'est aussi occupé des conditions nécessaires à l'existence de corps circulant autour des grosses planètes. Ses recherches l'ont conduit, comme moi, à cette conséquence que la moindre distance à laquelle une lune puisse conserver sa figure d'équilibre, malgré l'attraction du corps central, est deux fois et demie le rayon de ce dernier multiplié par la racine cubique du rapport de la densité de la planète à celle du satellite. Ce sont là précisément mes résultats de 1849. Le travail de M. Vaughan est bien postérieur, ayant paru dans le *Philosophical Magazine*, décembre 1860 ; mais je dois le citer comme venant confirmer mes propres conclusions.

Il est donc certain que les anneaux de Saturne se trouvent, par rapport à leur planète, à une distance où des satellites ordinaires ne sauraient subsister, à moins d'avoir une densité beaucoup plus grande que celle de l'astre. Si l'on admet qu'un satellite se soit formé vers la distance 2 de Saturne, comme il n'a pu subsister sous forme ellipsoïdale, ni probablement sous aucune autre figure stable, il a dû immédiatement se résoudre en fragments de plus en plus petits, et reconstituer ainsi l'anneau primitif. En un mot, la forme annulaire du système est une conséquence nécessaire de la position qu'il occupe. Telle est la réponse à la première question que nous nous étions posée.

65. *De la constitution de l'anneau de Saturne.* — Ces considérations conduisent naturellement à découvrir quel est l'état physique de la substance des anneaux. On ne peut faire à cet égard que trois hypothèses. Ou bien ces anneaux sont formés d'astéroïdes très-nombreux circulant autour de la planète : ce seraient les débris du satellite hypothétique ou virtuel dont nous parlions tout à l'heure, lequel n'a pu subsister, si même il a jamais existé. Cette supposition est la plus en harmonie avec les résultats de notre analyse. — Ou bien ces anneaux sont fluides. — Ou enfin chacun d'eux se meut tout d'une pièce, d'un mouvement angulaire commun, à la manière d'un système solide.

Dans l'hypothèse de la fluidité, il faut nécessairement admettre, comme je l'ai fait remarquer [1], que l'anneau entier se compose d'un nombre indéfini d'anneaux élémentaires circulant chacun autour de Saturne avec une

[1] *Nouvelles Recherches sur la figure des atmosphères des corps célestes*, nº 10, 1862.

vitesse qui croît, conformément à la troisième loi de Képler, à mesure qu'on se rapproche de la planète : le temps de révolution à la distance 2 serait $0^j,437$ (durée de la rotation de Saturne) ; à la distance 1,5, il ne sera plus que $0^j,283$, etc. Il paraît bien difficile de concevoir l'existence permanente de ces anneaux concentriques *en nombre infini*, si on les suppose liquides ou gazeux.

66. Si l'on veut, au contraire, que le système soit formé d'un nombre *limité* d'anneaux se mouvant avec une vitesse commune, il faut nécessairement qu'ils soient solides ; sans cela, les parties inégalement éloignées du centre prendraient des vitesses angulaires différentes. Les anneaux ne peuvent être ramenés à un mouvement d'ensemble que par une intime liaison des diverses parties, l'anneau interne qui va trop lentement étant retenu par l'anneau extérieur, et inversement. Quant aux molécules non adhérentes à la partie solide, mais simplement posées sur l'anneau, elles ne sauraient s'y maintenir en équilibre *par la seule influence de la pesanteur vers la planète et de la force centrifuge* [1]. Telles sont les conséquences de l'hypothèse de la solidité.

Dans cette hypothèse, il faut donc nécessairement tenir compte d'une nouvelle force, la *cohésion* de l'anneau. C'est ce que j'ai indiqué dans les deux Mémoires cités ; mais je n'ai pas cherché alors à apprécier la grandeur de cette cohésion, nécessaire pour faire marcher d'ensemble des points qui naturellement auraient des vitesses distinctes.

Ce calcul a été fait par M. Hirn, dans ses belles recherches sur les anneaux de Saturne ; et par là il a mis en pleine évidence l'impossibilité d'une cohésion capable d'empêcher l'anneau de se désagréger et de résister aux causes incessantes de destruction qui le menacent. Car il ne suffit pas qu'à un moment donné l'anneau satisfasse aux conditions indispensables pour l'équilibre, il faut qu'il puisse *durer* ; or, les influences auxquelles il est soumis (actions de la planète, du Soleil, des autres anneaux) sont telles que la stabilité d'un pareil système est très-difficile à assurer. En particulier, s'il s'agit d'un anneau solide, M. Hirn trouve qu'aucun corps, si rigide ou tenace

---

[1] *Note sur la loi de Bode*, 1853, pag. 7. — *Nouvelles Recherches*, pag. 12.

qu'on puisse le supposer, ne résisterait sans se rompre aux efforts qu'il a à supporter [1]. L'anneau n'est donc pas solide ni formé d'anneaux élémentaires solides.

67. Laplace, recherchant les conditions de stabilité d'un anneau, était arrivé à cette conclusion qu'un système d'anneaux solides ne peut se maintenir autour de Saturne s'ils sont parfaitement uniformes. Il est nécessaire pour leur équilibre qu'ils présentent en quelque point une épaisseur ou une densité un peu plus grande ; en un mot, qu'ils soient lestés. Mais cette condition est-elle suffisante, et quel devrait être ce lest, suivant la vitesse et la nature de l'anneau ? Ces questions ont été abordées plusieurs fois, sans recevoir de solution définitive jusqu'à ces derniers temps.

Ainsi, selon G. Bond, un anneau fluide ne serait pas nécessairement instable : il pourrait se subdiviser en anneaux d'inégale vitesse, et ces divisions seraient variables et passagères. — M. Peirce pense qu'une planète ne saurait être environnée d'anneaux sans être munie d'un nombre suffisant de satellites disposés pour les soutenir ; de sorte que Saturne devrait la conservation de son anneau à son riche cortége de satellites.

M. Clerk-Maxwell (*Monthly notices*, 1859), après une étude attentive du lest nécessaire à la stabilité, conclut à l'impossibilité d'un anneau solide. Il assimile ceux de Saturne à des cordons de perles disposées circulairement et affectées de vagues régulières, soit dans le sens du rayon, soit dans le sens transversal. Chaque cercle serait formé de particules indépendantes, en nombre indéfini, et tournant autour de la planète avec des vitesses différentes, selon leurs distances respectives.

Telles sont aussi les conclusions de M. Hirn, dans son Mémoire de 1872, où sont approfondies les diverses questions se rapportant à la stabilité de l'anneau. Non-seulement il y discute complètement, au point de vue mécanique, toutes les hypothèses sur la nature et les conditions d'existence du système saturnien ; mais, empruntant aux théories modernes de la thermodynamique des notions que nul, mieux que lui, ne saurait appliquer, il étudie

[1] Hirn ; *Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne*, 1872. — *Le monde de Saturne, ses conditions d'existence et de durée*. 1872.

les réactions calorifiques engendrées dans les anneaux fluides, origine des anneaux actuels. Enfin, il montre comment, moyennant certaines hypothèses sur sa nature chimique, l'anneau primitivement gazeux a pu se transformer plus tard, par voie de refroidissement, en une infinité de corpuscules distincts, à peu près uniformément répartis, et qui continuent à circuler autour de Saturne.

Ce que l'on aperçoit, c'est l'enveloppe des mouvements de ces points éclairés par le Soleil; mais un anneau n'est, à vrai dire, ni solide, ni liquide, ni gazeux, ni même de forme invariable. Il peut se dilater, se rétrécir, s'allonger, selon les changements de direction relative de ces astéroïdes très-petits, mais très-nombreux. Rigides et immuables au premier aperçu, il suit de la constitution de ces anneaux qu'ils doivent sans cesse varier de forme et d'épaisseur apparente.

68. On voit que les idées qui ont prévalu aujourd'hui concordent bien avec le résultat de mes propres études sur ce sujet. Ce résultat, tel que je l'énonçais en 1849, bien avant les travaux de M. Maxwell et de M. Hirn, c'est la non-possibilité de l'existence permanente d'un satellite à la place de l'anneau. Si, par impossible, ce satellite a existé, il s'est dissous immédiatement en parcelles séparées par des intervalles plus ou moins grands mais probablement d'un ordre supérieur à leurs dimensions. Au lieu d'un corps continu, ce n'est plus qu'un nuage, un tourbillon de poussière ; mais l'apparence est toujours celle d'un véritable anneau.

Tandis que l'anneau principal est aussi lumineux que la planète, l'anneau interne, qui n'est connu que depuis peu d'années, est très-pâle et presque transparent. Du reste, il n'offre pas trace de réfraction, et sa pâleur tient sans doute à la plus grande rareté des corpuscules dont il est formé. Il n'est même pas impossible que les anneaux extérieurs jouissent, eux aussi, d'un certain degré de transparence. A l'appui de cette opinion, M. Faye a rappelé qu'en 1848 et 1849, époque d'une disparition de l'anneau, alors que son plan passait entre la Terre et le Soleil, l'anneau restait visible, pour de puissants instruments, par sa face non éclairée. Peut-être laissait-il passer quelques traces de lumière à travers les intervalles de ses éléments discontinus.

69. *De la distance où s'est formé l'anneau.* — J'ai signalé depuis longtemps[1] ce fait remarquable : l'anneau se trouve en partie au dehors et en partie au dedans de la limite équatoriale de l'atmosphère de Saturne, c'est-à-dire de la distance où a lieu, en ce moment, l'équilibre entre la pesanteur vers la planète et la force centrifuge due à sa rotation actuelle, dont la durée est de $0^j,437$. Cette distance est de deux rayons de la planète, ce qui correspond à peu près au milieu de l'anneau principal, à la ligne de séparation. L'anneau extérieur s'étend de la distance 2,4 ou 2,3 à 2; l'anneau intérieur, de 1,9 à 1,6 ou 1,5; enfin, entre 1,5 et 1,3 est le nouvel anneau, celui qui est pâle et transparent.

Ces anneaux étant distincts et indépendants, chacun tourne sans doute avec la vitesse qui convient à sa distance : ceux qui sont au-delà de la distance 2, en un temps plus long que $0^j,437$; ceux en deçà, en un temps plus court. Si tous les anneaux avaient la même vitesse angulaire, il faudrait qu'ils fussent solides, sans quoi, ainsi que nous le rappelions au n° 66, les parties non adhérentes de l'anneau ne sauraient se maintenir en équilibre sous la seule influence de la force centrifuge et de la pesanteur. Étant admise la constitution de l'anneau telle qu'on vient de l'exposer (n° 68), les divers points qui le composent ont, chacun, son orbite particulière, sa vitesse, sa durée de révolution; mais leur existence au dedans de la limite atmosphérique est une anomalie qu'il faut expliquer.

70. Dans les idées de Laplace, tout anneau se forme à la distance L, et reste en dehors de l'atmosphère, tandis que celle-ci se contracte. Il y a donc ici une dérogation au système qui doit être modifié de façon à rendre compte de l'existence d'anneaux à l'intérieur de la limite atmosphérique. Deux explications se présentent naturellement : ou ces anneaux se sont réellement formés dans la région qu'ils occupent aujourd'hui, ou bien, s'étant formés à l'extérieur, ils ont diminué de rayon jusqu'à pénétrer au dedans de l'atmosphère de Saturne.

Cette dernière explication n'est pas inadmissible : on conçoit qu'une

---

[1] *Note sur la loi de Bode*, 1853, pag. 6.— *Mémoire sur la figure des corps célestes*, 1854, n° 30.

zone abandonnée, si elle est à l'état fluide, puisse éprouver en se refroidissant un resserrement dans toutes ses dimensions qui la rapproche de la planète, comme ferait un anneau solide dont le rayon diminuerait d'une manière continue.

L'autre explication est également acceptable : on a vu (n° 11) que la production d'anneaux intérieurs, loin d'être incompatible avec la théorie cosmogonique, en est une conséquence directe. Nous avons exposé en détail comment, lorsque la limite théorique L décroît plus rapidement que la limite réelle de la nébuleuse, une partie du fluide qui s'en sépare afflue vers l'équateur avec une vitesse insuffisante ; au lieu de se mouvoir circulairement, elle pénètre dans l'atmosphère, et s'y décompose en traînées elliptiques.

Le mouvement de ces traînées à travers un milieu résistant tend à s'éteindre ou à s'égaliser avec celui du milieu. Leur persistance est donc peu probable, à moins que l'atmosphère ne soit très-rare par rapport aux traînées elles-mêmes. Si cette dernière condition est remplie, elles pourront se transformer en une série d'anneaux intérieurs, circulant chacun avec sa vitesse propre autour de la planète.

Enfin, au lieu de s'agglomérer en masses sphéroïdales, ces anneaux seront amenés par la condensation à se résoudre en une infinité de particules très-petites, parce que l'équation nécessaire à l'équilibre permanent d'un sphéroïde fluide ne s'est pas trouvée satisfaite au voisinage immédiat de Saturne, comme on l'a expliqué au n° 64.

71. *Hypothèse sur l'origine des anneaux.* — Les considérations précédentes s'appliquent parfaitement au système saturnien, si l'on admet que, à mesure que les traînées pénètrent dans l'atmosphère, celle-ci disparaît peu à peu, de sorte que leur mouvement s'exécute dans un vide à peu près parfait. Je vais montrer que cela aura lieu nécessairement pour une atmosphère analogue à celle de la Terre, c'est-à-dire jouissant des propriétés ordinaires de nos gaz.

La masse gazeuse qui enveloppe un astre tend à se disperser, en vertu de la répulsion mutuelle des molécules ; la pesanteur seule contrarie cette tendance. A la limite physique d'une atmosphère, il y a équilibre entre le poids d'une molécule et la répulsion des molécules inférieures ; telle est la condition qui détermine la hauteur H de l'atmosphère. Cette hauteur ne dépend pas de la quantité totale de gaz : elle ne change pas (pourvu que la température reste constante), par suite d'une accumulation ou d'une diminution du fluide. Elle résulte uniquement de l'élasticité du gaz, élasticité qui dépend des variations de pesanteur et de température, et de la nature du gaz, mais nullement de son abondance ou de sa rareté. L'atmosphère s'arrête là où le gaz ne tend pas à se dilater davantage, soit qu'il ait perdu tout ressort, soit que ce ressort soit équilibré par la pesanteur.

Quand une atmosphère est formée de divers gaz, on doit la considérer comme la superposition des atmosphères dues à chacun d'eux : chaque atmosphère se comporte comme si elle était seule, et sa limite de hauteur est réglée d'après son élasticité propre et sa température. Par conséquent, les éléments gazeux disparaîtront l'un après l'autre, à mesure que la limite théorique L s'abaissera au-dessous de la hauteur H correspondante à chacun de ces gaz.

72. Ces principes admis, concevons autour de Saturne, à une certaine époque, une atmosphère dont la hauteur H, telle que nous venons de la définir, soit supérieure à deux rayons de la planète, égale par exemple à 2,4. Lorsque, dans sa diminution continue, la limite L vient à atteindre cette distance 2,4, et tombe ensuite au-dessous, une couche se détache de l'atmosphère, se déverse à l'équateur, y dépose un anneau circulaire, et rentre en partie dans l'atmosphère ayant subi une première condensation.

Par là, l'atmosphère primitive a perdu de sa substance et diminué de densité ; mais, H restant le même, d'après le principe précédent, elle tend à s'élever à la même hauteur, et dépasse L. La couche qui s'est détachée est ainsi remplacée par une autre, laquelle s'écoule à son tour et va former une nouvelle série de traînées. Cela continue tant que toute la partie de l'atmosphère à laquelle convient la hauteur H n'est pas épuisée. Elle s'échappe peu à peu tout entière, se transforme en courants elliptiques, et laisse après elle un vide plus ou moins complet dans lequel se meuvent ces courants.

Rien ne s'oppose dès-lors à la transmutation ultérieure des traînées en anneaux intérieurs, lesquels pourront subsister quelque temps à l'état fluide;

ils acquerront une existence durable s'ils viennent à se condenser en particules solides, isolées et indépendantes. N'est-ce pas là l'image de ce que nous voyons autour de Saturne, dont les anneaux sont partiellement en deçà de la limite théorique L, mais bien au-delà de la limite actuelle de l'atmosphère ?

73. Si nous voulons poursuivre encore les conséquences de cette explication, nous considérerons une molécule abandonnée par l'atmosphère de Saturne à la distance a, et arrivant à l'équateur avec une vitesse hV, inférieure à celle qui lui permettrait de décrire le cercle équatorial. La théorie exposée au nº 10 indique que cette molécule décrira une ellipse (*fig.4*) dont la distance périhélie

$$\mathrm{OA}' = \frac{ah^2}{2-h^2}.$$

Si de tout le contour de l'équateur partent des files de molécules analogues, leur ensemble tendra à se concentrer suivant le cercle de rayon

$$\mathrm{R}_1 = ah^2 .$$

Les deux parties de l'anneau principal se ressemblent assez pour qu'on doive leur attribuer une origine identique : l'une et l'autre se sont formées au dedans de l'atmosphère. L'anneau extérieur a donc commencé à se déposer lorsque l'atmosphère s'étendait à la distance $a = 2{,}4$. Et, comme il finit à la distance 2, en posant $\mathrm{R}_1 = ah^2 = 2$, d'où $h^2 = 0{,}83$, et $h = 0{,}9$, on obtient la plus petite valeur de h pour laquelle des anneaux se soient formés. La série des anneaux élémentaires qui s'étendent entre les distances 2,4 et 2 correspond ainsi aux traînées elliptiques parties des divers points du cercle $\mathrm{OA} = 2{,}4$ avec des vitesses décroissantes de V à 0,9V.

Arrivons maintenant à l'époque où la limite L s'est arrêtée à la distance 2, qu'elle n'a pas dépassée. Pour la même valeur $h = 0{,}9$, on a $ah^2 = 1{,}6$. Ainsi, l'anneau intérieur, compris de 2 à 1,6, répond aux traînées elliptiques issues de la distance 2, avec des vitesses variant aussi de V à 0,9V, et des excentricités e décroissantes de 0 à 0,2.

Les traînées correspondantes à des vitesses décroissantes de 0,9V à 0,8V ont donné des anneaux situés de 1,6 à 1,3 ; c'est la position de l'anneau translucide, qui résulte par conséquent de traînées beaucoup plus allongées que les précédentes, e variant de 0,2 à 0,35.

Pour la valeur $h = 0,8$, on a une traînée dont la distance périhélie OA′ égale exactement le rayon. Pour des valeurs plus petites, elles rencontreraient la planète. Ainsi, il ne peut exister d'anneau en deçà de la distance $R_1 = 1,3$, correspondant à la vitesse initiale 0,8V.

Les traînées d'excentricité supérieure à 0,35 sont allées tomber sur Saturne. Or, la vitesse V′ au périhélie est (n° 10)

$$V' = \frac{2 - h^2}{h} V ;$$

et V, qui répond à la distance $L = 2$, est double de la vitesse actuelle v à l'équateur. Les traînées correspondantes à $h < 0,8$ ont donc une vitesse supérieure à 1,7V ou à $3,4v$; elles produisent, en tombant sur la planète, un courant équatorial circulant dans le même sens qu'elle, mais beaucoup plus vite.

En résumé, l'anneau de Saturne s'est formé lorsque la hauteur de l'atmosphère, désignée par H au n° 72, étant égale à 2,4, la limite théorique L a diminué de 2,4 à 2. Tant que l'atmosphère a conservé une densité sensible, ces seules traînées ont pu se maintenir qui, répondant à h très-voisin de l'unité, ne pénétraient qu'à une minime profondeur : tel est le cas de l'anneau principal. Plus tard, l'atmosphère étant presque entièrement dissipée, des traînées plus elliptiques ont pu subsister : c'est l'origine de l'anneau transparent. Plus allongées encore, elles ont atteint la planète.

74. Sans prolonger la discussion de cette hypothèse, on voit qu'elle s'adapte bien aux particularités du monde de Saturne. Nous admettrons donc comme vraisemblable que c'est dans le sein même de son atmosphère que se sont établis et régularisés ces courants de particules matérielles, vrai tourbillon de poussière cosmique qui s'offre à nous sous l'aspect d'un anneau.

Étendue jusqu'à la hauteur extrême H que son élasticité comporte, l'atmosphère, à un certain moment, est atteinte par sa limite théorique L. A partir de là, la couche fluide qui dépasse cette limite s'écoule vers l'équateur et rentre dans l'atmosphère ; et comme H reste constant, une nouvelle couche la remplace et suit le même chemin, jusqu'à ce que tout le fluide ait ainsi abandonné l'atmosphère. Cette première condensation le transforme en traînées matérielles parcourant des ellipses de foyer commun, situées toutes à l'intérieur du cercle équatorial de rayon L.

Ces traînées, se mouvant dans un milieu qui se raréfie de plus en plus, pourront subsister assez longtemps pour subir une dernière modification qui les convertira en anneaux. Pendant ce temps, l'atmosphère qui les enveloppait d'abord s'est dissipée en partie ou s'est finalement déposée sur la planète. Mais sa limite théorique est encore aujourd'hui de deux rayons ; et si, par impossible, il s'opérait un développement suffisant de l'atmosphère saturnienne, elle pourrait atteindre de nouveau la division principale des anneaux, embrassant l'anneau sombre et une moitié de l'anneau brillant.

VIII.

DE LA LUMIÈRE ZODIACALE.

75. « Si dans les zones abandonnées par l'atmosphère du Soleil il s'est trouvé, dit Laplace, des molécules trop volatiles pour s'unir entre elles ou aux planètes, elles doivent, en continuant de circuler autour de cet astre, offrir toutes les apparences de la lumière zodiacale. » La ressemblance de cette lumière avec les anneaux de Saturne est manifeste, particulièrement avec l'anneau interne : l'une et l'autre sont à la fois éclairés et translucides. Leur constitution est certainement identique ; on se les représente comme l'enveloppe apparente des orbites d'une infinité de molécules, suivant une route commune à peu près circulaire, et qui nous réfléchissent les rayons du Soleil.

Toutefois la lumière zodiacale a une forme lenticulaire, tandis que les anneaux saturniens sont couchés dans un même plan avec une précision à peu près absolue, et ont une épaisseur presque inappréciable. Cette différence n'est pas cependant essentielle, et peut s'expliquer par la disposition relative des orbites dans l'anneau solaire.

Imaginons, par exemple, que les courants circulaires qui forment le système de Saturne prennent par rapport à l'équateur une inclinaison croissante, à partir de zéro, en se rapprochant de la planète, ces cercles étant d'ailleurs tournés suivant toutes les directions possibles ; l'ensemble de ces cercles en nombre infini, entourant la planète, formera une sorte de lentille. En faisant tourner la *fig.* 10 autour de l'axe OX des pôles, on aura une idée de la surface enveloppe de ces courants de plus en plus inclinés ; cette surface reproduit à peu près l'aspect de la lumière zodiacale.

Voyons si ces diverses conditions ont pu être réalisées autour du Soleil. Et d'abord on ne saurait mettre en doute l'existence autour de cet astre de courants formés de particules matérielles. Les traînées nébuleuses, abandonnées successivement par son atmosphère, ne se sont pas condensées en totalité autour des centres planétaires : il a dû en subsister un grand nombre qui par leur nature ou leur isolement sont restées indépendantes.

76. Quant à l'obliquité de plus en plus grande à laquelle leur ensemble doit son apparence lenticulaire, c'est la conséquence d'une proposition établie par M. Ch. Simon dans le Mémoire déjà cité sur la rotation de la Lune. D'après ce savant, l'effet de la condensation sur une masse planétaire à l'état fluide, comme fut la Terre, ne change pas l'inclinaison de son équateur sur l'écliptique. Il en est autrement s'il s'agit d'une zone de vapeur, d'un anneau isolé, troublé par le Soleil. En se refroidissant, il se contracte comme ferait un cercle solide, et de plus son inclinaison s'accroît avec le temps.

De ces deux résultats de son analyse, M. Simon tire une explication de la grande inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique, alors qu'à l'origine cette obliquité n'a pu être que très-faible. Si elle a augmenté depuis, c'est par la précipitation d'une série d'anneaux dont le rayon a progressivement diminué par le refroidissement jusqu'à tomber à la surface terrestre, et dont en même temps l'inclinaison est devenue considérable.

Revenons maintenant aux courants dont l'existence autour du Soleil n'est pas contestable. Chacun d'eux diminue de rayon et tend à augmenter d'inclinaison, tant qu'il n'est pas arrivé à se condenser en parcelles solides. A ce moment, leur état est définitivement fixé ; rayon et inclinaison ne changent plus, du moins par la cause en question.

Si les anneaux de Saturne se sont maintenus sensiblement dans un même plan, c'est grâce à l'aplatissement de la planète et à l'influence des satellites :

là, est la source de la stabilité du système. L'analyse démontre que le renflement équatorial agit sur les anneaux, comme sur les huit satellites, pour les ramener peu à peu dans des plans presque identiques, pourvu qu'à l'origine les angles formés par les orbites n'aient pas été très-différents; et les satellites réagissent sur les anneaux d'une manière analogue.

De même pour les anneaux déposés dans le plan de l'équateur solaire ou aux environs, qui n'ont pas été absorbés par les nébuleuses planétaires ; s'ils ont subsisté à l'état fluide, ils ont subi l'influence de la nébuleuse solaire, alors considérablement aplatie. Mais lorsque l'atmosphère du Soleil s'est définitivement condensée, et que la plus grande partie de sa masse s'est déposée sur le noyau central, celui-ci, qui est sphérique, n'a plus maintenu dans leur plan primitif les anneaux fluides encore persistants. Depuis lors, ceux qui ont continué à se contracter ont acquis des inclinaisons progressivement croissantes, jusqu'au moment où ils se sont finalement résolus en particules solides.

Ce sont ces traînées de grains de sable éclairés par le Soleil, dont l'ensemble, se projetant sur le ciel, produit la clarté diffuse de la lumière zodiacale. Ses variations d'intensité et d'étendue correspondent aux changements de position des traînées et aux diverses manières dont elles se présentent à nos regards.

IX.

DE LA TERRE.

77. *Sa constitution intérieure.* — Ce serait ici le lieu d'étudier l'état actuel des planètes, tel qu'il résulte des circonstances de leur formation et des diverses phases qu'elles ont eu à traverser. Nous nous bornerons à parler de la Terre ; et même pour cette planète, plus directement soumise que les autres à nos investigations, nos connaissances sont fort imparfaites.

Elle a été primitivement à l'état de nébuleuse, c'est-à-dire entièrement fluide. Par l'effet du refroidissement et de la pression des couches superposées, elle s'est condensée d'abord vers le centre, et ce noyau n'a pas cessé de s'accroître. La surface externe, étant exposée à un rayonnement plus actif, s'est refroidie rapidement et recouverte d'une croûte solide. Entre cette croûte et le noyau est une couche très-chaude en fusion. Mais cette couche liquide n'a qu'une faible épaisseur: sans cela il s'y produirait des marées considérables. A raison de sa masse même, aux phases principales de la Lune, elle déterminerait des bouleversements dont les tremblements de terre les plus violents ne sauraient nous donner une idée.

Ainsi, la stabilité relative de l'écorce terrestre est une présomption en faveur de l'état solide de la partie intérieure du globe. Une mince couche fluide les sépare, et son influence sur l'enveloppe externe permet de rendre compte d'une série de phénomènes, tels que les effets mécaniques des volcans, que les géologues ne sauraient expliquer autrement.

78. Quand nous disons que le noyau central du globe est solide, nous n'entendons pas l'assimiler en tous points aux solides que nous avons sous les yeux, ne pouvant nous faire une idée de l'état de la matière soumise simultanément à une température excessivement élevée et à une énorme pression. Tout ce qu'on peut affirmer de cette matière, c'est qu'elle possède une rigidité comparable et même supérieure à celle de nos corps solides, et qu'elle n'a rien de la fluidité et de l'élasticité des liquides. De même, pour la couche qui est au-dessous de l'écorce extérieure, on ne saurait dire quel est son état de liquidité ou de viscosité.

On doit donc se borner à affirmer que le noyau terrestre se comporte comme un solide, relativement aux phénomènes de la précession, de la nutation et des marées; et que, si une couche fluide entoure ce noyau, elle est assez peu épaisse pour que son intervention dans ces phénomènes astronomiques soit insensible. Mais son action, soit mécanique, soit thermique, sur la croûte superficielle, est capable de produire les divers phénomènes pour l'explication desquels les géologues ont imaginé l'hypothèse du feu central. La profondeur de cette couche, en d'autres termes la distance où les matériaux terrestres sont en fusion, ne paraît pas être bien considérable : on l'estime de 20 à 40 kilomètres, mais elle ne saurait être déterminée d'une manière précise ; car s'il est incontesté que la température croît à mesure que l'on s'enfonce, la loi de cet accroissement est tout à fait incertaine.

79. *Loi de la densité à l'intérieur de la Terre.* — Un élément de la constitution physique du globe qui nous est beaucoup mieux connu, c'est la loi

suivant laquelle augmente la densité des couches, de la surface au centre. La Terre n'est pas homogène : sa densité moyenne est environ 5,5 ; or la densité des continents ne dépasse pas 2,6. Il faut donc que le poids spécifique des couches intérieures soit beaucoup plus grand : il doit aller en croissant vers le centre, et d'une manière à peu près régulière. En effet, lors de la fluidité du globe, les couches de nature diverse se sont disposées par ordre de densité. De plus, cette densité, pour des substances identiques, dépend de la pression : à des pressions décroissantes du centre à la surface doivent correspondre des densités décroissantes aussi, suivant une loi sensiblement continue.

Cette continuité étant admise, au moins comme approximative, il existe certaines conditions astronomiques auxquelles la loi de la densité doit satisfaire, de sorte que, si la forme mathématique de cette loi était connue, les constantes ou coefficients de la formule pourraient être déterminés. Ces conditions sont l'aplatissement terrestre et la précession des équinoxes ; car la figure de la Terre est liée à la nature des couches dont elle est composée, et il en est de même de la précession, dont la grandeur dépend des moments d'inertie du sphéroïde terrestre.

Pour découvrir quelle est cette loi, en tenant compte seulement de la compression exercée sur chaque couche par le poids des couches supérieures, on observera que, s'il s'agissait d'un gaz, la densité croîtrait proportionnellement à la pression : la dérivée de la pression par rapport à la densité serait constante. Quant aux liquides et aux solides, ils résistent d'autant plus à la compression qu'ils sont déjà plus comprimés : le rapport de l'accroissement de la pression à l'accroissement de la densité n'est plus constant, il augmente avec la densité.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire consiste à admettre que la dérivée $\frac{d\Pi}{d\rho}$ est proportionnelle à la pression Π. On obtient ainsi une loi de densité, imaginée d'abord par Legendre, étudiée par Laplace, et qui satisfait assez bien aux données de l'expérience. Cette loi ne saurait être absolument rigoureuse que si la Terre était formée d'une substance unique, chimiquement homogène, mais comprimée sous son propre poids. Ces suppositions ne paraissent pas s'écarter beaucoup de la réalité.

80. J'ai proposé[1] de modifier l'hypothèse de Legendre par l'introduction d'un terme proportionnel au carré de la densité, de sorte que

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = m\rho + n\rho^2 \ ;$$

ce qui a pour résultat de rendre encore plus rapide la diminution de la compressibilité quand la pression augmente. J'ai été ainsi conduit à une loi beaucoup plus simple que celle de Legendre : la diminution de la densité est proportionnelle au carré de la distance au centre. Les conséquences de cette loi s'accordent bien mieux encore que l'hypothèse de Legendre avec les observations, ainsi qu'on va le voir.

La formule des densités qui résulte de mes suppositions est

$$\rho = \rho_0(1 - \beta a^2),$$

où β est une constante, ρ_0 la densité centrale, ρ la densité à la distance a du centre. Le coefficient indéterminé β se calcule au moyen d'une équation très-importante fournie par la théorie de la précession.

Cette équation est une relation entre deux intégrales

$$\int_0^1 \rho a^2 da \ , \qquad \int_0^1 \rho a^4 da \ ,$$

qui résultent de la distribution de la matière à l'intérieur du globe, depuis le centre $a = 0$ jusqu'à la surface $a = 1$. Il résulte de données astronomiques dépendant à la fois de la précession et de l'aplatissement terrestre, que leur rapport est égal à 2,02. Ainsi

$$\int_0^1 \rho a^2 da = 2{,}02 \int_0^1 \rho a^4 da \, .$$

Remplaçant ρ par la valeur ci-dessus, on trouve $\beta = 0{,}8$. Donc

$$\rho = \rho_0(1 - 0{,}8a^2).$$

Appelant D la densité moyenne de la Terre, on a

[1] Journal *l'Institut*, 14 juin 1848. — *Mémoire sur la loi de la densité à l'intérieur de la Terre*. 1848. — Voyez aussi le *Traité élémentaire de Mécanique céleste* de M. Résal, chap. IV où se trouvent analysées mes recherches sur ce sujet.

$$D = 3\int_0^1 \rho a^2 da = 0,52\rho_0.$$

D'où, au centre, $\rho_0 = 1,925D$; et à la surface, $\delta = \frac{1}{5}\rho_0 = 0,385D$.
La densité des couches centrales est donc cinq fois plus grande que celle des couches superficielles, et presque double de la densité moyenne.

La courbe de la *fig.* 11 représente notre loi de densité, c'est une parabole. A la distance $a = 0,775$, ρ est égale à D.

En adoptant la valeur $D=5,5$, il s'ensuit

$$\rho_0 = 10,6 \qquad \text{et} \qquad \delta = 2,1.$$

Ainsi, la densité centrale n'est pas aussi grande qu'on pourrait le croire. Mais de là on ne saurait conclure quels sont les corps qui constituent le noyau : il faudrait pour cela tenir compte de la pression que ces corps y supportent, et de la température à laquelle ils sont soumis. Or, l'ignorance où nous sommes sur ces deux points essentiels empêche de rien affirmer sur la nature des substances qui occupent ces régions.

81. *Variation de la pesanteur à l'intérieur du globe.* — L'augmentation de densité de la surface au centre entraîne des conséquences intéressantes et propres à soumettre nos formules au contrôle de l'observation. Si la Terre était une sphère homogène, la pesanteur irait en diminuant quand on descend au-dessous de sa surface, et elle varierait proportionnellement à la distance au centre. En la supposant formée de couches concentriques de densité croissante, il doit en être autrement, et l'on conçoit aisément que la pesanteur puisse augmenter jusqu'à une certaine profondeur ; car si d'une part un point intérieur n'est plus soumis à l'action des couches qui l'enveloppent, d'autre part il se trouve plus rapproché des couches centrales, et à cause de l'excès de densité de ces couches, le dernier effet peut l'emporter sur le premier.

Saigey, dans sa *Physique du globe* (1842), après avoir exposé l'hypothèse de Legendre, en fait l'application au calcul de la pesanteur à diverses profondeurs au-dessous de la surface. Il trouve ainsi que cette pesanteur, au lieu de diminuer, doit aller en croissant jusqu'à une distance du centre égale aux 84 centièmes du rayon. Là elle atteindrait un maximum, puis décroîtrait jusqu'au centre, où elle est forcément nulle. Saigey proposait de vérifier ces résultats en faisant osciller un pendule à secondes au fond d'une mine.

Cette observation a été faite depuis lors, en 1854, par M. Airy, dans la mine de charbon de Harton (Northumberland), à la profondeur $h = 385$ mètres. Il a constaté un accroissement de la gravité égal à $\frac{1}{19190}$ de la gravité à la surface. Le rapport de la profondeur au rayon terrestre est ici $\frac{h}{R} = \frac{1}{16535}$. Or, l'hypothèse de Legendre conduit à la formule

$$\frac{P-p}{p} = 0,626\frac{h}{R}.$$

D'où il suivrait que, dans les conditions où M. Airy a observé, l'accroissement de la pesanteur aurait dû être seulement

$$\frac{P-p}{p} = \frac{1}{26400},$$

nombre beaucoup plus petit que le résultat de l'expérience. Nous allons voir que ce résultat est au contraire pleinement d'accord avec nos formules[1].

82. Il est aisé de voir que l'attraction P d'une sphère sur un point placé à la distanee a est

$$P = \frac{4\pi}{a^2}\int_0^a \rho a^2 da.$$

A la surface de la Terre, où $a = 1$,

$$p = 4\pi\int_0^1 \rho a^2 da.$$

Substituant pour ρ l'expression que nous avons adoptée, il vient

$$P = 4\pi\rho_0\left(\frac{a}{3} - \frac{4}{5}\frac{a^3}{5}\right), \qquad p = 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\frac{1}{5}\right).$$

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tom. XXXIX, pag. 1101, 1215. — *Note sur la variation de la pesanteur à l'intérieur de la Terre*. 1855.

Éliminant ρ_0, on a enfin

$$P = \frac{25}{13} p \left(a - \frac{12}{25} a^3\right).$$

C'est la loi de la pesanteur à l'intérieur de la Terre, telle que je l'ai donnée dans mon Mémoire de 1848.

Cette loi est représentée par la *fig.* 12. On reconnaît que P augmente depuis $a = 1$ jusqu'à la profondeur $a = \frac{5}{6}$, où elle atteint son maximum $1,068p$, c'est-à-dire qu'elle y est plus grande qu'à la surface de plus de $\frac{1}{15}$. Elle décroît ensuite, reprend la valeur p pour $a = 0,655$; puis diminue rapidement, et à peu près proportionnellement à a, jusqu'au centre, où elle s'annule.

Pour une faible variation de profondeur, on a $\frac{\delta P}{P} = -\frac{11}{13}\delta a$, ou bien

$$\frac{P - p}{p} = \frac{11}{13} \frac{h}{R}.$$

Dans l'expérience de M. Airy, où $\frac{h}{R} = \frac{1}{16535}$, on doit avoir

$$\frac{P - p}{p} = \frac{1}{19530}.$$

La différence entre ce nombre et la fraction observée $\frac{1}{19190}$ est évidemment inférieure à l'erreur possible de l'observation, où il s'agit de constater sur une durée de 24 heures une variation de deux secondes et un quart environ.

Ainsi, l'expérience de M. Airy a vérifié d'une manière inespérée ma formule de la variation de la pesanteur; elle confirme en même temps la loi très-simple de densité (n° 80) que j'ai proposé de substituer à celle de Legendre et Laplace. Les données qui en découlent sur l'état des couches centrales ont acquis par cela même un plus haut degré de vraisemblance. Leur densité ne dépasse certainement pas 11 à 12 fois celle de l'eau ; et encore cette forte densité est-elle due en partie à la compression que ces couches supportent, aussi bien qu'à la nature propre des matériaux qui les constituent.

83. *Des causes qui ont pu modifier les climats terrestres.* — En remontant dans le passé, l'étude de la Terre oblige à admettre que, à des époques relativement peu anciennes, elle s'est trouvée dans des conditions tout autres qu'aujourd'hui. Les divers âges géologiques sont probablement liés aux grandes inégalités des éléments de l'orbite terrestre. Bornons-nous aux variations de l'excentricité : leur l'influence sur les climats est manifeste et peut devenir très-considérable, surtout en se combinant avec le déplacement relatif du périgée et des équinoxes, qui dans une période de 21,000 ans transporte de l'hiver à l'été, et ramène de l'été à l'hiver, le moment du plus grand rapprochement du Soleil. L'unité de temps en rapport avec les durées qui séparent les maxima et minima consécutifs de l'excentricité est d'environ 25,000 ans : telle est aussi, en quelque sorte, l'unité de mesure des périodes géologiques.

En dehors de ces inégalités séculaires, il y a encore à tenir compte des modifications essentielles que la Terre a subies depuis son origine, en vertu des mêmes causes cosmogoniques qui avaient présidé à sa formation. Ainsi, l'on s'est souvent demandé si l'inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique n'avait pas varié. Les recherches déjà citées de M. Simon rendent cette variation probable, et elles en indiquent la cause dans la précipitation à la surface de la Terre d'anneaux formés à l'intérieur de son atmosphère pendant qu'elle se condensait. Par suite de leur contraction (n° 76), ces anneaux, d'abord équatoriaux, se sont de plus en plus inclinés sur l'écliptique. Chaque fois que l'un d'eux est tombé sur notre globe, l'inclinaison de celui-ci et sa vitesse angulaire en ont reçu une légère augmentation ; et cette action, souvent renouvelée, a pu à la longue produire un résultat appréciable. Il est superflu d'ajouter que le déplacement de l'axe de rotation d'une masse fluide recouverte d'une croûte élastique entraîne une déformation immédiate du sphéroïde.

84. Mais là n'est pas le plus important des effets que l'on est en droit d'attribuer à ces anneaux ou courants elliptiques qui, dans les derniers temps de la condensation de la Terre, sont venus se précipiter à sa surface, comme nous l'avons expliqué pour Saturne (n° 73). La chute de ces traînées a

développé une quantité de chaleur proportionnée à l'intensité du choc et du frottement dû à leur excès de vitesse.

C'est donc une nouvelle source calorifique qui, dans notre théorie, vient à intervalles irréguliers réchauffer la Terre, interrompre ou ralentir son refroidissement progressif, et qu'il faut joindre à la chaleur solaire et à la chaleur centrale quand on essaie d'expliquer les changements thermiques qui distinguent les divers âges du globe. La cause nouvelle que nous signalons ici n'est pas d'ailleurs caractérisée par des effets lents et continus : elle se manifeste brusquement, avec violence, par de vrais cataclysmes. De plus, elle est extérieure, tandis que c'est du dedans au dehors que se propage la chaleur dégagée à chaque progrès nouveau de la solidification du noyau.

En résumé, autour de la Terre primitive, comme autour des autres planètes, se sont déposés des anneaux plus ou moins instables, se sont établis des courants plus ou moins excentriques, groupés dans le plan de l'équateur, et formés aux dépens de l'atmosphère elle-même. Ces traînées nébuleuses sont successivement venues tomber à sa surface, lui apportant, avec un bouleversement géologique, de la chaleur et des éléments nouveaux.

85. Tandis que la Terre éprouvait ces modifications, le Soleil se transformait de son côté. Avant d'arriver à son état actuel d'étoile ou de soleil proprement dit, lorsqu'il n'était encore qu'une immense nébuleuse, son influence sur les planètes différait de ce qu'elle est aujourd'hui. Remontons par la pensée à l'époque où l'atmosphère solaire atteignait la limite théorique actuelle 0,17. Elle offrait l'apparence d'une nébuleuse très-aplatie, dont le grand axe vu de la Terre dépassait 19°, ou 36 fois le diamètre actuel; le petit axe en était les deux tiers, soit 13°. Quel que fût alors son éclat, il n'en était pas moins pour la Terre une source de chaleur. Peu à peu, cette immense enveloppe de vapeurs se condensant, la nébuleuse a diminué de dimension, jusqu'au jour où, dépouillant son dernier voile, le Soleil apparut dans toute sa splendeur.

Tant que le disque lumineux et calorifique a conservé les grandes proportions que nous venons d'indiquer, son action directe pouvait s'exercer sur les zones polaires, qui maintenant en restent privées durant des mois entiers. Ainsi, certains climats terrestres ont grandement perdu, sous le rapport de l'uniformité, au régime actuel, c'est-à-dire à la substitution d'un soleil de petit diamètre à une nébuleuse de grande dimension.

Il est donc permis de se demander, avec M. Blandet[1], s'il n'y a pas une corrélation entre la diminution du diamètre solaire et les changements dont notre globe porte la trace. La haute température qui a régné jadis dans des contrées actuellement tempérées ou glaciales, et qu'on a attribuée à l'influence prépondérante de la chaleur centrale, serait due aussi à ce que les régions polaires jouissaient alors de la vue d'une partie au moins de la grande nébuleuse. Il est vrai que le voile nuageux qui recouvrait le Soleil en diminuait la radiation; mais, de son côté, l'atmosphère terrestre, probablement plus lourde et plus épaisse, retenait mieux les rayons solaires, et uniformisait la répartition de la chaleur sur toute la surface.

Quoi qu'il en soit, la Terre, comme tout le système solaire, a conservé l'empreinte des modifications que subissent les nébuleuses en voie de refroidissement. On y reconnaît les phases successives de la condensation d'une atmosphère, sa résolution en anneaux extérieurs ou intérieurs, et les effets des traînées elliptiques destinées à retomber sur le noyau central et à lui restituer en partie la chaleur qu'il perd incessamment.

X.

DU SOLEIL.

86. La haute température du Soleil, son aspect, les phénomènes dont il est le théâtre, suggèrent de prime abord l'idée qu'il est liquide, au moins à la surface. Mais cet astre étant formé de substances analogues aux matériaux de notre globe, comme le montre l'analyse spectrale, il en résulte une contradiction manifeste avec un élément essentiel de la constitution du Soleil, sa densité moyenne. Cette densité est parfaitement connue : elle ne dépend pas de la parallaxe solaire, attendu que la masse et le volume varient l'un et l'autre en raison inverse du cube de cette parallaxe. Il est

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tom. LVII, pag. 79.

donc certain que le Soleil a une densité moyenne égale à un quart de celle de la Terre, soit 1,4 comparée à l'eau.

On ne saurait contester cependant que les substances les plus lourdes doivent occuper le centre du système solaire; et l'on constate en effet un accroissement général de la densité, des planètes les plus éloignées aux plus centrales. L'existence d'un Soleil à l'état liquide et à peu près homogène, ayant une densité à peine supérieure à celle de l'eau, est inconcevable, même s'il n'est constitué que par les éléments terrestres. D'autre part, si l'on établit une comparaison avec la Terre, où la densité centrale atteint cinq fois celle de la surface, on se demande quelle peut être la densité superficielle du Soleil, avec une moyenne densité de 1,4 seulement.

Imaginons à l'intérieur du Soleil un noyau dont la densité croisse du dehors au dedans, à peu près comme dans notre globe, depuis 3 jusqu'à 12; attribuons à ce noyau la masse tout entière de l'astre, de telle sorte que la densité moyenne rapportée au volume apparent du Soleil soit 1,4; nous trouverons que le rayon de ce noyau est les trois cinquièmes du rayon apparent. Le volume excédant aurait une masse et une densité négligeables par rapport au noyau. De cette manière, on se rendrait compte de la très-faible densité moyenne du Soleil ainsi constitué: un noyau central n'occupant qu'un cinquième du volume total, une atmosphère de vapeur dont la surface plus ou moins définie limite le disque solaire, et dont le mouvement de rotation peut différer de celui du noyau.

87. Selon M. Faye, la masse entière du Soleil est gazeuse, et à une température tellement élevée que tous les corps y sont non-seulement en vapeurs, mais dans cet état où les combinaisons chimiques deviennent impossibles. A la surface refroidie par le rayonnement, la température s'abaisse assez pour que la combinaison puisse avoir lieu. Ce sont les produits nuageux de ces combinaisons qui, en se condensant, acquièrent un pouvoir rayonnant que n'ont pas les gaz, et deviennent source de lumière et de chaleur. Ces nuages, en vertu de leur densité supérieure, tombent vers le centre, ils atteignent des couches où la température est plus élevée, s'évaporent et retournent à l'état de gaz simples. De ces déplacements résultent dans l'atmosphère solaire des courants en rapport avec la différence de

température des diverses régions. Par l'effet de ces courants, la masse du Soleil est continuellement mélangée, et contribue tout entière à alimenter le rayonnement calorifique qui émane de sa surface.

La nébuleuse solaire, qui s'étendait primitivement bien au-delà de Neptune, est maintenant réduite à de beaucoup moindres proportions. Toutefois son volume égal à treize cent mille fois celui de la Terre, sa densité supérieure à celle de l'eau, sa température élevée, en font un immense réservoir de chaleur qui n'a pas sensiblement diminué depuis nombre de siècles, malgré ses pertes incessantes, et qui suffira longtemps encore à réchauffer notre système planétaire. Cette conservation, au moins apparente, de la température solaire serait inconcevable si la radiation s'opérait aux dépens des couches superficielles seulement, ou bien si elle provenait d'une combustion ou de toute autre action chimique. Elle est au contraire très-naturelle, dans la théorie qu'on vient de rappeler, si le Soleil est le résultat de la condensation d'une nébuleuse.

88. *Origine de la chaleur solaire.* — Ceci nous ramène à la nébuleuse incandescente d'où, suivant Laplace, tout notre monde est sorti. Sa chaleur initiale, c'est la chaleur dégagée dans l'agglomération en un même corps des divers éléments qui sont venus le constituer. Tombés ensemble de distances très-grandes, réunis sous l'influence de leur mutuelle gravitation, le mouvement perdu dans la collision s'est transformé en une somme de chaleur équivalente.

Comme conséquence de cet énorme développement de chaleur vers le centre de l'agglomération, il a dû s'opérer une réduction en vapeurs de toute la masse qui s'est immédiatement convertie en une immense atmosphère : c'est la nébuleuse de Laplace. Elle tourne sur elle-même, comme le système primitif dont elle est émanée ; seulement la vitesse angulaire, au lieu d'être constante, diminue à mesure qu'on s'éloigne du centre, conforformément au principe des aires; ce qui, pour le dire en passant, explique la forme spirale ou annulaire de certaines nébuleuses.

Dans sa condensation ultérieure, la nébuleuse a reproduit les divers phénomènes décrits plus haut : ainsi, elle a abandonné successivement une série d'anneaux dont chacun a retenu une portion correspondante de la chaleur totale. Il semble donc que le Soleil a dû perdre, depuis le commencement de la condensation, une fraction considérable de sa chaleur primitive. On peut s'étonner que ce qui reste suffise pour entretenir son rayonnement actuel, sans diminution sensible.

Cette difficulté disparaît par la considération des courants intérieurs qui, selon notre théorie, venaient reconstituer l'atmosphère solaire, à mesure qu'elle se contractait. Les anneaux extérieurs de Laplace ne représentent alors qu'une minime fraction de la masse entière. Les traînées elliptiques, en se détachant du Soleil, ne l'abandonnent pas définitivement ; la plupart se réunissent finalement à lui, et par leur chute lui apportent une somme de chaleur destinée à compenser ses pertes, réintégrant ainsi dans sa masse une grande partie de la force vive que la nébuleuse contenait virtuellement.

89. Quant à l'importance de la chaleur développée par la concentration en un seul noyau des molécules constituant la nébuleuse primitive, on ne saurait douter qu'elle ait suffi à approvisionner le Soleil pour bien des milliers de siècles. On calcule, en effet, que la planète Jupiter, venant à tomber sur le Soleil, produirait une quantité de chaleur susceptible d'alimenter pendant 16,000 ans sa radiation, telle qu'elle a été mesurée par Pouillet. La moitié de la masse de la nébuleuse solaire, supposée à la distance de Jupiter, pour fixer les idées, donnerait, en se réunissant au centre, une quantité de chaleur représentée approximativement par 8,000,000 d'années. On conçoit donc qu'il ait pu s'y accumuler assez de chaleur pour entretenir la température dont il jouit depuis tant de siècles.

Le Soleil, tout en se condensant, s'est donc réchauffé dans les régions centrales, en recueillant toute l'énergie possédée par les masses qui y sont retombées successivement. Lorsque la chute des traînées elliptiques a cessé, la chaleur solaire a atteint sa valeur définitive. A partir de ce moment, ce n'est plus qu'une masse incandescente en voie de refroidissement, un réservoir de chaleur qui s'épuise, parce que ses pertes ne se réparent pas. La diminution de la température solaire est donc certaine : si lente qu'elle soit, elle finira par devenir sensible. S. W. Thomson estime qu'il s'écoulera plusieurs millions d'années avant que le Soleil cesse d'être pour les planètes une source de chaleur.

90. *De la rotation du Soleil.* — On peut se demander si la constitution actuelle du Soleil conserve encore des traces des phases qu'il a traversées à l'état de nébuleuse : car, pas plus du Soleil que de tout autre astre, on ne saurait dire qu'il soit parvenu à un état définitif, sans rapport avec ses variations antérieures. Malheureusement, cette constitution physique est imparfaitement connue sur les points les plus essentiels. Les idées émises au n° 86 sur la densité et l'état physique des couches centrales, dans l'hypothèse liquide, doivent être présentées comme de simples conjectures, du moment qu'il s'agit d'une masse gazeuze, au sein de laquelle agissent en sens opposé une température et une pression incalculables. Il est pourtant vraisemblable que, même à l'état gazeux, le Soleil possède un noyau où est concentrée la majeure partie de sa substance, et qu'enveloppe une série de couches atmosphériques beaucoup moins denses. Au delà est l'atmosphère coronale décrite par M. Janssen, que sillonnent des anneaux ou des traînées variables de forme et d'éclat.

On ne saurait émettre que des suppositions sur les conditions mécaniques d'un pareil système. Rien n'oblige à croire que la masse entière se soit contractée d'une seule pièce, que la photosphère ait un mouvement identique à celui des couches qu'elle recouvre, et que ces couches elles-mêmes partagent exactement le mouvement de rotation du noyau.

C'est même le contraire qui semble indiqué par la loi de rotation résultant de l'observation des taches, notamment de la série due à M. Carrington, et dont la formule analytique, déduite par M. Faye, peut s'écrire :

$$\omega = 700' + 157' \cos^2 \lambda,$$

ω désignant la vitesse angulaire à la latitude λ. Cette vitesse, loin d'être constante, croît du pôle à l'équateur d'une quantité proportionnelle au carré du cosinus de la latitude. Il faut bien remarquer que ω a été conclu du mouvement apparent des taches à la surface; mais on ne saurait affirmer que ce mouvement appartienne réellement et en totalité au Soleil. Le déplacement des taches pourrait être lié à leur origine et aux lois encore incertaines de leur formation.

La masse solaire est incessamment traversée, d'après la théorie de M. Faye, par des courants ascendants partis d'une grande profondeur et dans toutes les directions, qui viennent continuellement ralentir la vitesse superficielle. Ces courants supposent des contre-courants descendants, et cette circulation, apportant à la surface la chaleur du centre, entretient la photosphère et le flux de chaleur qui s'en échappe régulièrement. L'intérieur du Soleil est ainsi dans un état d'agitation perpétuelle.

Quelles que soient la nature et la cause des taches, elles ont certainement une intime relation avec ces courants; et la loi de leurs déplacements dépend de la vitesse et de la direction suivant laquelle les courants, partis des régions centrales, arrivent à la surface. Tant que cette question de dynamique des fluides ne sera pas résolue, tant qu'on n'aura pas la formule analytique de ces mouvements ascendants et descendants qui traversent et mélangent les couches gazeuses du globe solaire, on ne pourra dire positivement si l'expression de ω, citée plus haut, se rapporte à la photosphère.

91. S'il vient à être établi que ce singulier mode de rotation est inhérent au Soleil même, c'est-à-dire que les régions équatoriales de la photosphère tournent plus vite que les autres régions, il y aura lieu d'en chercher la cause dans la condensation de la nébuleuse solaire, et il sera naturel de la rattacher aux dernières transformations que le Soleil a subies.

Reportons-nous à l'époque où son atmosphère dépassait la limite $L = 0,17$ qui convient à la rotation actuelle : sa forme était alors lenticulaire, très-aplatie aux pôles. Un moment est venu où, par l'effet d'une dernière condensation, cette atmosphère s'est en grande partie précipitée, laissant à découvert le globe sphérique du Soleil actuel. Une couche s'est alors déposée, s'étendant sur tout le sphéroïde, mais très-inégalement : son épaisseur croissant du pôle à l'équateur, puisqu'il en était ainsi de l'épaisseur de l'atmosphère elle-même. Il en résulte aussi que la vitesse de rotation croît pareillement du pôle à l'équateur. Car toute particule matérielle qui par le fait de la condensation tombe sur le Soleil, et par conséquent se rapproche de l'axe de rotation, acquiert dans sa chute un excédant de vitesse, en vertu du principe des aires, et d'autant plus qu'elle tombe de plus haut. C'est donc vers l'équateur que la couche déposée tend à tourner le plus vite : la différence dépend encore de l'épaisseur de l'atmosphère primitive, épaisseur plus grande à l'équateur qu'aux pôles.

Un effet tout semblable vient s'ajouter au précédent, par suite de la chute des traînées elliptiques qui pénètrent dans l'atmosphère aux environs de l'équateur. Les unes sont d'abord très-allongées; les autres, à cause des frottements et résistances, acquièrent progressivement une ellipticité assez grande pour atteindre le noyau solaire.

Considérons, pour préciser, une traînée partie de la distance aphélie $a = L = 0,17$, avec une vitesse hV, et allant raser le Soleil, dont le rayon exprimé au moyen de la même unité est $r = 0,0047$. Appelant v_0 la vitesse équatoriale actuelle, on a

$$V = v_0 \frac{a}{r} ;$$

et par les formules du n° 10,

$$\frac{ah^2}{2-h^2} = r , \qquad V' = \frac{2-h^2}{h} V ;$$

V' est la vitesse au périhélie, c'est-à-dire à la distance r, au contact du Soleil. De ces relations on tire :

$$h^2 = \frac{2r}{a+r} , \qquad V' = \frac{ah}{r} V = \frac{a^2 h}{r^2} v_0 .$$

Introduisant à la place des données leurs valeurs numériques, nous trouvons $h^2 = 0,054$; d'où $h = 0,23$, et $V' = 8V = 304 v_0$. Ainsi, toute traînée dont l'excentricité sera 0,95 ira toucher le Soleil à son périhélie. Sa vitesse sera alors huit fois plus grande qu'à l'aphélie, et trois cents fois plus grande que celle du Soleil même.

On voit par là qu'une traînée qui vient à rencontrer le Soleil lui apporte, dans le sens de sa rotation, un excès considérable de vitesse. S'il s'agissait d'une masse cohérente, ne pouvant se mouvoir que d'une pièce, cet excès de vitesse n'accélérerait qu'insensiblement la rotation du système ; mais les diverses couches pouvant se déplacer les unes par rapport aux autres, et n'ayant entre elles que peu de cohésion, la vitesse apportée par la traînée se communique simplement à la couche où elle va se mêler. D'ailleurs tous ces courants ne s'écartent guère du plan de l'équateur : ce sont donc les régions équatoriales qui acquerront ainsi la plus grande accélération, et ω décroîtra au contraire vers les pôles.

92. Dans l'hypothèse qu'on vient de développer, le mouvement de rotation décelé par les taches appartiendrait à une couche superficielle, et cette couche résulterait de la précipitation d'une partie de l'atmosphère primitive. Sa vitesse, variable avec la latitude, tiendrait à la fois de son origine et de la chute des zones équatoriales qui lui sont arrivées successivement par un mécanisme semblable à celui que nous avons déjà décrit pour Saturne et pour la Terre (nos 74 et 84). C'est donc à la dernière transformation de la nébuleuse solaire que se rattacherait la loi de la rotation actuelle.

En venant s'unir au Soleil, ces traînées, grâce à leur excès de vitesse, lui apportent encore de la chaleur : tout le mouvement qui disparaît par suite du choc se transforme en une quantité de chaleur équivalente à la force vive perdue. Il y a là une source calorifique produisant son effet principal à l'équateur, de sorte que les deux calottes polaires ont dû être moins chaudes que le reste du disque.

Les différences de vitesse entre des couches, soit voisines, soit superposées, tendent naturellement à disparaître, et le mouvement à s'égaliser. Cependant l'accroissement de vitesse angulaire, du pôle à l'équateur, subsiste aujourd'hui, malgré les résistances et frottements entre les couches au contact, qui concourent à éteindre ces différences. Il en faut conclure : — ou bien que cette accélération ne remonte pas à une époque éloignée, c'est-à-dire que la condensation dont elle résulte n'est pas de date très-ancienne ; — ou bien que ce régime s'est régularisé peu à peu en se mettant d'accord avec les courants qui aboutissent à la surface, qu'il s'est équilibré en quelque sorte avec la circulation interne de la masse solaire, dont la loi nous est encore inconnue. C'est cette loi qu'il importe de découvrir ; sans elle, on ne peut que hasarder des conjectures sur ces diverses questions.

93. *Des cyclones solaires.* — On sait que M. Faye explique les taches solaires par des mouvements tournants ou cyclones, dus au mode de rotation de la photosphère ; ces cyclones ont pour origine la différence de vitesse sur deux parallèles voisins. Nous n'avons pas l'intention d'aborder ici la théorie des taches, ni de discuter les effets possibles de ces cyclones, mais seulement de montrer comment, étant admis le mode de rotation formulé ci-dessus, on en conclut la loi suivant laquelle le mouvement

tourbillonnaire varie de l'équateur aux pôles, augmentant d'abord jusqu'à une certaine latitude, pour décroître ensuite rapidement.

Soit, en général, la vitesse angulaire de rotation

$$\omega = A + B \cos^2 \lambda \,.$$

La vitesse absolue à cette latitude s'obtient en multipliant ω par le rayon du parallèle, ou simplement par $\cos \lambda$, le rayon du Soleil étant pris pour unité. C'est donc

$$v = A \cos \lambda + B \cos^3 \lambda \,.$$

De la différence qui existe entre les vitesses de deux parallèles contigus, sur une sphère tournant à la manière d'un solide, il ne saurait résulter de tourbillon. Or, le terme $A \cos \lambda$ représente un déplacement commun, une rotation autour des pôles. On peut donc en faire complètement abstraction, et tout se passera comme si une sphère solide, tournant d'un mouvement uniforme $v = A \cos \lambda$, était recouverte d'un fluide possédant le mouvement relatif $v = B \cos^3 \lambda$. C'est de ce seul terme qu'il y a à tenir compte.

94. Considérons deux points M, M′, correspondants aux latitudes λ, $\lambda - \Delta\lambda$. Quand on passe du premier au second, v augmente de

$$3B\Delta\lambda \sin \lambda \cos^2 \lambda \,. \qquad (1)$$

Tel est l'excédant de vitesse de M′ sur M, déduction faite de la différence qui existerait naturellement dans une rotation ordinaire. Cet excédant est constamment positif; il s'annule à l'équateur, et aussi au pôle. Sa dérivée est

$$3B\Delta\lambda . \cos \lambda (\cos^2 \lambda - 2 \sin^2 \lambda) \,,$$

qui est nulle au pôle, nulle aussi pour $\tan^2 \lambda = \frac{1}{2}$: c'est donc vers $\lambda = 35°$ que la différence de vitesse de deux parallèles voisins atteint son maximum.

Ces différences de vitesse engendrent, à la surface du Soleil, des mouvements gyratoires ; nous ne chercherons pas à apprécier quelle en est l'importance. M. Faye y a trouvé la cause des taches que l'on observe principalement dans deux zones de part et d'autre de l'équateur, et des pores que l'on constate sur tout le disque, et qui ne seraient que des taches beaucoup plus petites, plus difficiles à apercevoir.

Si la fonction (1) est réellement l'expression analytique de la cause générale de ces phénomènes, sa marche devra s'accorder avec la loi de la distribution des taches. L'une et l'autre ont effectivement un minimum au pôle, un autre à l'équateur ; mais la zone où les taches se montrent plus ordinairement est comprise entre 10° et 30°, tandis que la fonction (1) a son maximum vers 35°. D'autre part, le décroissement vers les pôles est très-lent pour la fonction, tandis qu'au-delà de 50° de latitude on ne voit point de taches proprement dites. On pourrait cependant rendre l'accord plus satisfaisant en modifiant un peu cet essai d'explication.

95. A la considération de la vitesse relative sur deux parallèles voisins, substituons la force vive mv^2 correspondante à cette vitesse relative. La masse d'un élément superficiel sera supposée proportionnelle à l'épaisseur e de la couche en mouvement. Cette épaisseur elle-même diminue de l'équateur au pôle, par la raison énoncée au n° **91** ; et l'on doit présumer que son expression en fonction de la latitude est analogue à celle de ω, soit

$$e = a + b \cos^2 \lambda \, .$$

D'après cela, la vitesse à considérer étant $v = \mathrm{B} \cos^3 \lambda$, sa variation de λ à $\lambda - \Delta\lambda$ est $3\mathrm{B}\Delta\lambda \sin \lambda \cos^2 \lambda$, et la force vive en question est

$$9\mathrm{B}^2 \Delta\lambda^2 \sin^2 \lambda \cos^4 \lambda (a + b \cos^2 \lambda) \, . \qquad (2)$$

Cette nouvelle fonction est nulle encore au pôle et à l'équateur.

Son maximum est donné par l'équation

$$\mathrm{Sin}\, \lambda \cos^3 \lambda \, [4b \cos^4 \lambda + 5\,(a - b) \cos^2 \lambda - 2a] = 0 \, ,$$

qui s'annule à l'équateur et au pôle. L'autre racine dépend des valeurs de a et b. En particulier, pour $b = 0$,

$$3 \cos^2 \lambda - 2 = 0 \, , \qquad \cos^2 \lambda = \frac{2}{3} , \qquad \lambda = 35^\circ \; 16' .$$

C'est le résultat de tout à l'heure, ainsi que cela devait être. Si $a = b$,

$$2 \cos^4 \lambda - 1 = 0 \, , \qquad \cos^4 \lambda = \frac{1}{2} , \qquad \lambda = 32^\circ \; 46' .$$

Enfin, dans le cas extrême $a = 0$,

$$4 \cos^2 \lambda - 3 = 0 , \qquad \cos^2 \lambda = \frac{3}{4}, \qquad \lambda = 30^\circ .$$

On voit donc que, lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ augmente, le maximum marche vers l'équateur. Telle est l'influence de l'épaisseur e de la couche superficielle.

Quand le coefficient B vient à diminuer, la vitesse équatoriale se ralentit, la différence des vitesses d'un parallèle à l'autre se régularise; la fonction (2) diminue, et le phénomène des cyclones, qu'on suppose lié à cette différence, perd de son intensité. Si en même temps l'épaisseur e de la couche superficielle varie, par exemple par un accroissement de b, cette épaisseur diminue vers les pôles ; et il suit de ce qu'on vient de voir que la région du maximum des cyclones se rapproche alors de l'équateur. Voyons s'il n'existe pas quelque cause capable de produire à la fois ces deux effets.

Si l'on cherche cette cause dans le Soleil, on imaginera que le noyau central a une rotation particulière, plus rapide que celle de la photosphère, peut-être autour d'un axe différent, et tend à l'entraîner. De cette transmission du mouvement du noyau aux couches qui l'entourent et frottent sur lui, pourrait résulter une accélération de la région équatoriale de ces couches [1].

96. Il est plus difficile de comprendre qu'il y ait en dehors du Soleil des forces en état de modifier son mouvement. Toutefois, si la rotation appartient à une mince couche, glissant au-dessus de la surface solaire en vertu d'une impulsion primitive, elle peut obéir à des actions extérieures, comme notre océan à l'attraction de la Lune.

Les planètes, et généralement toute la matière disséminée dans le système, constituent une zone voisine du plan de l'équateur solaire, mais dont la masse, irrégulièrement répartie, change sans cesse de disposition. Tournant moins vite que le Soleil, ces divers corps impriment à son atmosphère un mouvement d'entraînement rétrograde. Car la marée due à chacun d'eux détermine, suivant sa direction, un renflement ou accumulation de fluide qui,

[1] Ém. Gautier ; *Archives de Genève*, avril 1864.

entraîné par la rotation solaire, disparaît peu à peu pour se reformer immédiatement en arrière. De là, un déplacement continu et progressif qui ralentit, surtout à l'équateur, la marche du courant superficiel.

L'influence de cette sorte d'anneau équatorial qui environne le Soleil tend à atténuer la vitesse relative $v = B \cos^3 \lambda$ de la photosphère par rapport au noyau, et par suite à uniformiser du pôle à l'équateur la vitesse angulaire. Ainsi, B diminue, et d'autant plus que cette influence est plus grande : donc aussi l'activité du mouvement tourbillonnaire faiblit. En outre, l'attraction d'un anneau extérieur a naturellement pour effet (à peu près comme la force centrifuge) d'accroître vers l'équateur l'épaisseur de la couche, ou d'augmenter le coefficient b ; et l'on a vu que cette augmentation a pour conséquence de rapprocher de l'équateur la région des cyclones. A l'inverse, si l'action extérieure devient plus petite, B augmente, b diminue; les mouvements gyratoires se développent, et leur maximum d'intensité s'écarte de l'équateur. Telle serait en gros la marche des phénomènes correspondants à l'inégale rotation du Soleil, due aux actions perturbatrices dont nous parlons. Comme elles varient sans cesse, suivant la position et la distance des planètes, il en résulte dans ω des inégalités périodiques fort compliquées, dont les plus importantes pourront seules se dégager du mouvement général.

Si l'on veut poursuivre jusqu'au bout ces déductions d'une hypothèse déjà bien hasardée, on remarquera que le courant solaire superficiel, en frottant sur la couche sous-jacente, doit donner lieu à des phénomènes électriques très-intenses: le magnétisme du Soleil, ses changements qui se reflètent sur la Terre, ses relations avec les taches, dépendraient surtout de la loi de rotation ; les inégalités de celle-ci produisant des variations correspondantes dans chacune des manifestations de l'énergie solaire.

Ainsi s'explique la liaison que l'on a constatée entre ces phénomènes : leur source commune résiderait dans la couche superficielle dont le mode actuel de rotation dénote l'origine, et qui ne remonte pas probablement à une époque fort éloignée.

97. L'idée préconçue de la stabilité du système du monde a conduit à exagérer la durée des phases par lesquelles il a passé, et à considérer son état présent comme permanent et définitif. Mais les observations précises en