Dimensions et distances

G. Paturel, Observatoire de Lyon
Stage DAFAP de janvier 2005

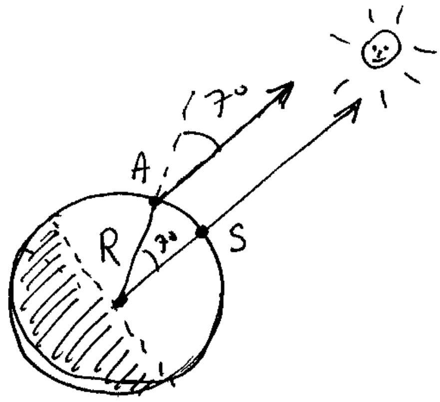
Aristarque de Samos et Eratosthène

Aristarque est né en -310 et mort en -230. Il a travaillé à Alexandrie en Egypte, ville fondée en -330 par Alexandre le Grand, roi de Macédoine. Il a calculé la distance Terre Lune, même s'il ne connaissait pas le rayon de la Terre qui fut déterminé plus tard par Eratosthène. Il a essayé en vain de déterminer la distance Terre Soleil.
Eratosthène est né en -276 à Cyrène en Libye et mort en -230. Il a réussi à déterminer le rayon de la Terre.

Méthode pour mesurer le rayon de la Terre.

Méthode historique. Eratosthène constate que le 22 juin, au solstice d'été, le Soleil culmine au zénith de Syène (les puits sont éclairés jusqu'au fond), tandis qu'a Alexandrie 5000 stades plus au nord, le Soleil forme un angle de 7° avec le zénith, à son point le plus haut. L'angle de 7° se retrouve au centre (voir la figure 1).

FIGURE 1



Comme les deux villes sont sur le même méridien, le Soleil culmine au même moment. Les mesures sont synchronisées ainsi.

L'angle de 7° découpe sur la circonférence de la Terre un arc de 5000 stades. Les 360° de la circonférence totale correspondent donc à une longueur de :

$$L = 360 \times \frac{5000}{7} = 250000 \text{ Stades.}$$

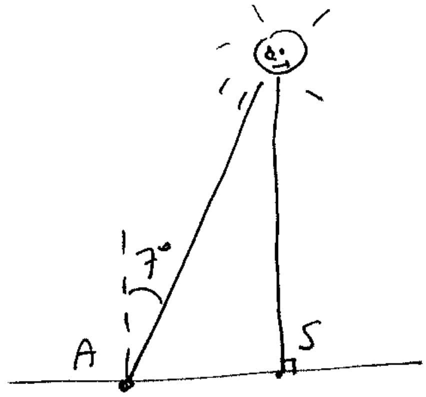
Si un stade mesure 0,16 km comme certains auteurs le pensent, le rayon de la Terre trouvé par Eratosthène serait de:

$\frac{250000 \times 0{,}16}{2\pi}$, c'est-à-dire 6400 km.

La mesure de l'angle de 7° est facile à faire. La longueur minimale d'un bâton, bien vertical, rapportée à sa hauteur donne la tangente de l'angle quand le Soleil culmine. C'est une mesure facile à faire avec des élèves.

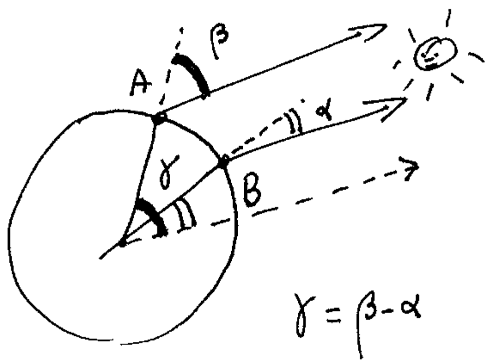
Une question intéressante est la suivante : Qu'aurait trouvé Eratosthène s'il avait supposé que la Terre était plate ?
On s'aperçoit que la différence d'angle aurait été interprétée comme résultant de la distance fini du Soleil. Un calcul simple (figure 2) similaire au précédent montre qu'on aurait trouvé que le Soleil était à 6400 km du lieu d'observation.

FIGURE 2



Méthode utilisable facilement. En prenant deux villes quelconque, situées sur un même méridien et de distance connue, on peut procéder à la mesure de l'angle entre le zénith et le Soleil, au moment où le Soleil culmine un jour quelconque de l'année. La synchronisation des mesures est assurée par le fait que le Soleil est à son point le plus haut. Le calcul est identique au précédent, mais l'angle au centre est obtenu par la différence des deux mesures, comme le montre la figure 3.

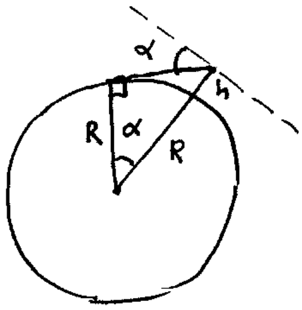
FIGURE 3



On peut généraliser encore la méthode en prenant deux villes quelconques (pas nécessairement sur un même méridien) et en faisant les mesures à un instant quelconque. Dans ce cas la synchronisation des mesures est assurée par une liaison téléphonique en temps réel. On aurait pu aussi calculer le décalage des temps résultat de la différence des longitudes, mais c'est un peu plus compliqué.

Méthode par l'observation de l'horizon, au bord de mer. Si on vise l'horizon depuis un lieu élevé, on doit s'apercevoir que la direction visée n'est pas rigoureusement perpendiculaire à la verticale (voir la figure 4).

FIGURE 4



Calculons à quelle distance L se trouve l'horizon visé depuis une hauteur h. L'application du théorème de Pythagore conduit à (R est le rayon de la Terre):

$$R^2 + L^2 = (R+h)^2$$

En développant et en négligeant h^2 devant , conduit facilement à l'expression :

$$L = \sqrt{2Rh}$$

Si on visait l'horizon depuis une hauteur de 640 mètres, quel serait l'angle de visée mesurée en dessous de l'horizon fourni par la perpendiculaire à la verticale (ou par un niveau à bulle) ?

L'angle α se retrouve au centre et on a la relation
$L = R.\alpha$, où α est l'angle mesuré en radians. En remplaçant L par son expression trouvée au-dessus il vient :

$\alpha = \sqrt{\dfrac{2h}{R}}$ = 0,014 radian, c'est-à-dire 0,8 degré. C'est un angle très difficile à mesurer.

Une variante de cette méthode est proposée dans le Cahier-Clairaut N°11 page 33. Elle consiste à observer depuis un point élevé la différence de niveau entre un lieu proche au niveau de la mer et l'horizon.

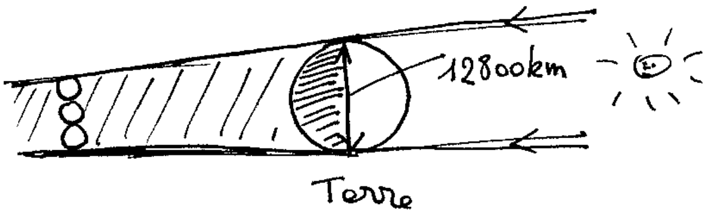
Mesure de la distance Terre Lune

Aristarque de Samos eut l'idée géniale d'utilisée l'observation d'une éclipse de Lune pour calculer la distance Terre Lune. Nous supposerons que le rayon de la Terre est connu. En fait Aristarque ne connaissait pas encore ce rayon et son résultat fut donné en unité du rayon de la Terre.

Calcul naïf. Si on mesure la durée d'une éclipse de Lune (passage de la Lune dans l'ombre de la Terre) on peut estimer facilement la distance Terre Lune. En effet, en supposant que ce passage se fait par le centre du "cylindre d'ombre", la longueur que doit parcourir la Lune dans l'ombre est de 12800 kilomètres. Si la durée est de 4 heures, on déduit que la vitesse de déplacement de la Lune sur son orbite est de 12800/4=3200 km par heure. Or la Lune a besoin d'un mois (700 heures) pour faire un tour complet autour de la Terre. Donc la longueur de cette circonférence est 700×3200, c'est-à-dire 2240000 kilomètres. D'où le rayon de l'orbite cherchée : 357000 kilomètres, qui n'est pas une mauvaise estimation de la distance Terre Lune. Nous verrons pourquoi, fortuitement cette méthode simple peut donner un bon résultat.

Méthode historique. Aristarque constata que le diamètre apparent de la Lune pouvait se reporter trois fois dans le disque d'ombre (Figure 5).

FIGURE 5



Le diamètre vrai de la Lune se déduit simplement du diamètre du cylindre d'ombre :
12800/3 = 4267 km.

Or le diamètre apparent de la Lune est de 0,5 degré. On trouve alors immédiatement la distance Terre Lune D par la relation classique (pour les angles petits) :

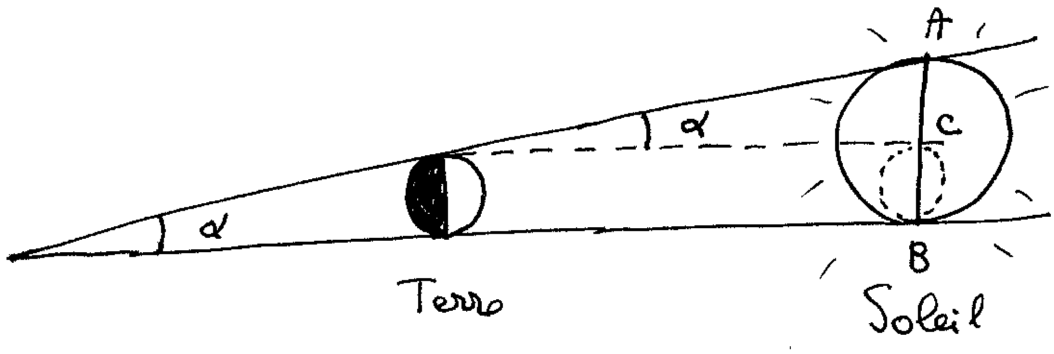
$$D = \frac{4267}{\tan(0{,}5)} = 490000 \text{ km.}$$

Cette valeur est un peu trop élevée. Cela tient au fait que l'on a considéré que l'ombre de la Terre était un cylindre alors qu'en réalité c'est un cône.

Comment faire la correction de cet effet ? Nous allons montrer que l'angle du cône est égal au diamètre apparent du Soleil (rappelons que ce diamètre apparent est égale à celui de la Lune, soit 0,5 degré - c'est pour cette raison que nous pouvons observer des éclipses de Soleil, la Lune pouvant masquer exactement le Soleil)

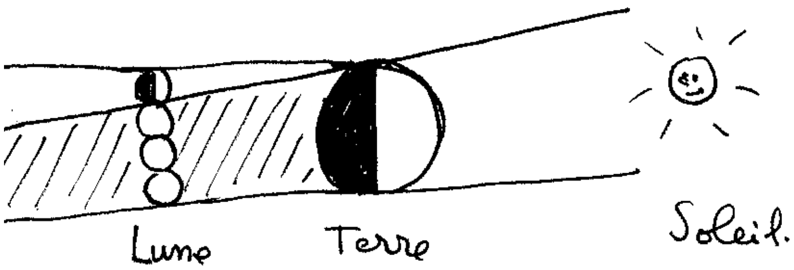
Comme on le voit sur la figure 6, l'angle du cône peut se tracer à partir de la Terre. Or le diamètre de la Terre est 100 fois plus petit que le diamètre du Soleil (on ne le saura que plus tard mais on pouvait supposé que le Soleil était bien plus gros que la Terre). Le point C peut donc se confondre avec le point B, de sorte que l'angle du cône peut effectivement se confondre avec le diamètre apparent du Soleil.

FIGURE 6



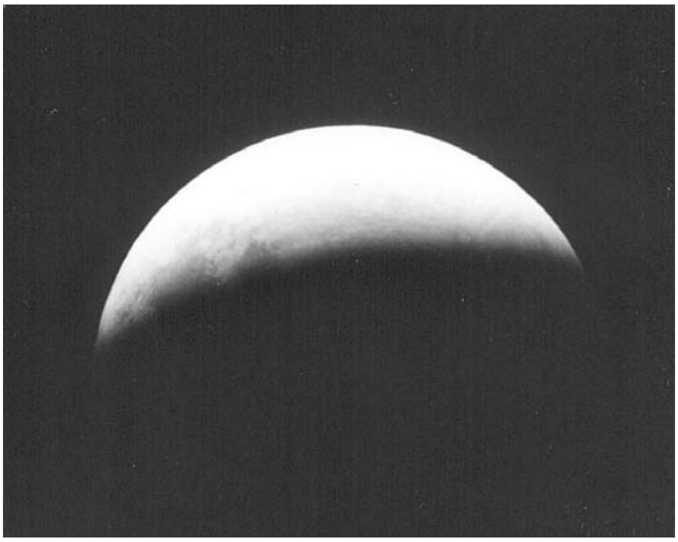
Dans ces conditions, on voit aisément (figure 7) que la Lune se reporte effectivement trois fois dans l'ombre de la Terre, mais que le diamètre de cette ombre n'est pas de 12800 kilomètre mais de 12800 kilomètres moins le diamètre de la Lune. Dit autrement, le diamètre de la Lune se reporte quatre fois dans les 12800 kilomètres. En répétant le calcul vu plus haut, on trouve la diamètre de la Lune 3200 kilomètre et sa distance D= 370000 kilomètres.

FIGURE 7



On comprend pourquoi la mesure de la durée de l'éclipse pouvait donner une valeur exacte. En effet, si cette durée est mesurée depuis l'instant où la Lune entre dans l'ombre jusqu'au moment où elle en sort, cela revient à majorer le diamètre de l'ombre du diamètre de la Lune, donc à corriger de l'effet du cône d'ombre.

Méthode utilisable facilement avec des élèves. Si on prend une photographie pendant une éclipse (Photo 1), on peut assez facilement calculer le diamètre de la Lune. Pour cela on essaye d'ajuster un cercle pour tracer le rayon de l'ombre, sur la photo. On détermine de la même façon le diamètre de la Lune, sur la photo. On peut ainsi déterminer directement combien de fois la Lune peut se reporter dans l'ombre de la Terre. On est ramené à la méthode historique d'Aristarque de Samos.



(Photo Daniel Toussaint)

PHOTO 1*: Eclipse de Lune*

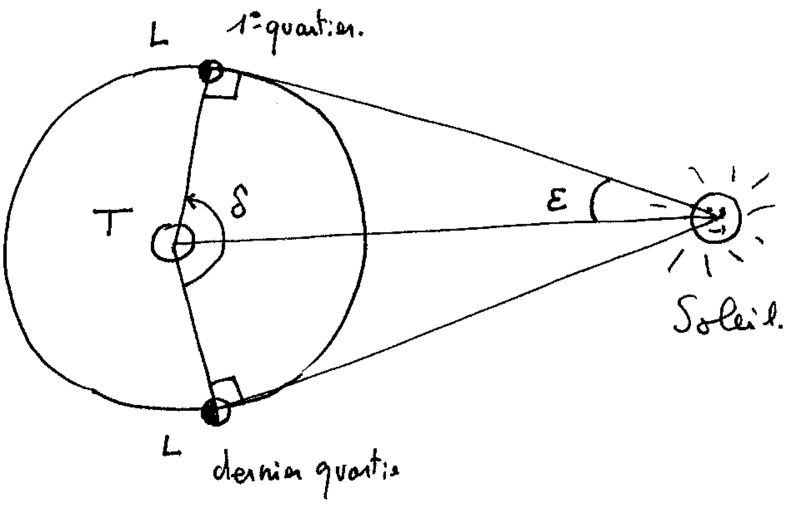
On peut dire que Aristarque a réussi a transporter son unité de longueur terrestre au niveau de la Lune en utilisant l'ombre de la Terre, sans pouvoir atteindre la Lune. Comment ferons nous pour le Soleil et les étoiles ? Nous allons le voir bientôt.

Méthodes modernes. Aujourd'hui, grâce aux réflecteurs posés sur la surface lunaire par les missions spatiales, il est possible de mesurer le temps de trajet de la lumière entre la Terre et la Lune. La distance Terre Lune est mesurée ainsi avec une précision de quelques centimètres.

Tentative de mesure de la distance Terre Soleil

Aristarque essaya de mesurer la distance Terre Soleil par une méthode très astucieuse mais malheureusement impraticable. En mesurant la durée δ qui sépare le dernier quartier du premier quartier, Aristarque essaya d'évaluer l'angle $\delta/2$ qui est le complémentaire de l'angle ε (figure 8).

FIGURE 8



Il essaya de déterminer le rapport de la distance Terre Lune *TL* à la distance Terre Soleil *TS*.

$$\frac{TL}{TS} = \sin \varepsilon$$

Avec les valeurs connues aujourd'hui, on trouve que l'angle ε est de 0,15 degré. L'angle δ est donc de 179,7 degrés. Pour mesurer la distance TS avec une erreur de 20%, il aurait fallu mesurer l'angle ε avec une incertitude de $\Delta\varepsilon = 0{,}2\varepsilon$, soit 0,03 degré ou, exprimé en temps, 4 secondes. Or il n'est pas possible d'estimer avec une telle précision l'instant précis du premier ou du dernier quartier.

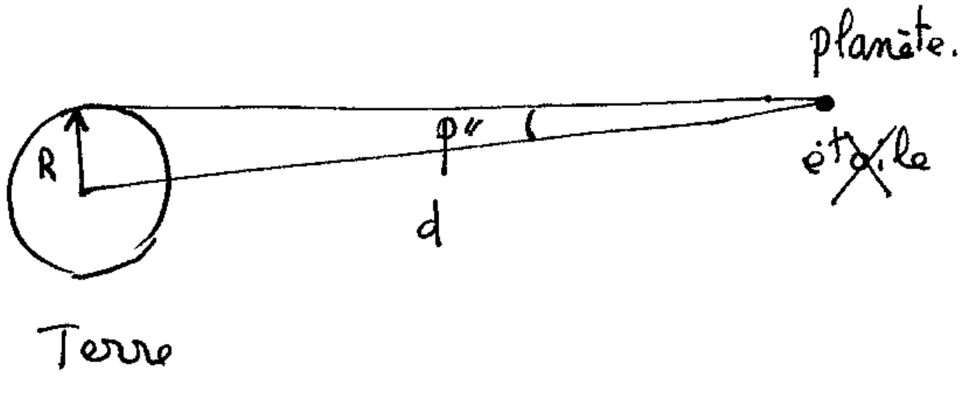
Mesure historique de la distance Terre Soleil

Cette mesure a été faite par Picard, Cassini et Richer en 1672. En pratique, on doit passer par l'observation d'une planète proche (Mars), et déduire la distance Terre Soleil de la troisième loi de Kepler (a^3/P^2=constante). Cette mesure a permis à Römer de mesurer la vitesse de la lumière en 1675. La mesure en laboratoire de la vitesse de la lumière a permis à son tour de confirmer la distance Terre Soleil.

La parallaxe horizontale de Mars. La parallaxe horizontale est, par définition, l'angle sous lequel on voit le rayon équatorial de la Terre depuis la distance de l'astre considéré. Picard, Cassini et Richer observèrent Mars depuis deux sites (Paris et Cayenne) au moment d'une opposition de Mars, quand Mars était très proche de la Terre. Le décalage de la direction de Mars depuis ces deux sites donne l'angle sous lequel on verrait la distance Paris Cayenne depuis Mars. Picard Cassini et Richer trouvèrent cet angle et en déduisirent la parallaxe horizontale de Mars de 24".
Calculons la distance Terre Mars au moment de cette opposition de 1672.

La figure 9 montre la relation que l'on a entre l'angle de parallaxe horizontale *p"* et la distance *d* en kilomètres. On trouve :

FIGURE 9

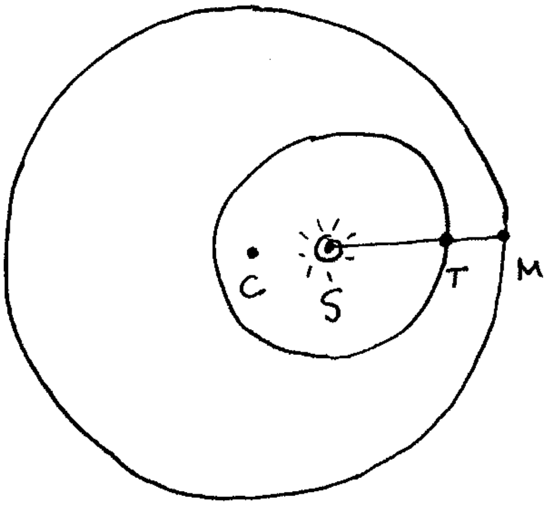


$d = 206265 \dfrac{R}{p''}$, où R est le rayon équatorial de la Terre (*R*=6400 km).

La mesure de Picard, Cassini et Richer conduit donc à une distance Terre Mars de 55 Mkm, au moment de l'opposition.

Déduction de la distance Terre Soleil.
L'excentricité de l'orbite terrestre est négligeable dans une première approximation, mais pas celle de Mars. La figure 10 illustre la géométrie du système. Le centre de l'orbite de Mars est C. Les positions du Soleil, de la Terre et de Mars sont S, T et M, respectivement.

FIGURE 10



On a par définition de l'excentricité e : CS = $e.a_M$. avec CM=a_M.
Avec une notation analogue on écrira ST=a_T.
On voit que $a_M = e.a_M + a_T + d$, où d est la distance Terre Mars au moment de l'opposition. On en tire facilement l'expression suivante :

$$a_M = \frac{a_T + d}{1-e}$$

L'application de la troisième loi de Kepler conduit à :

$\frac{a_T^3}{P_T^2} = \frac{a_M^3}{P_M^2}$, où les P dénotent les périodes sidérales. En éliminant a_M entre ces deux expression son trouve la distance cherchée :

$$a_T = \frac{d}{(1-e)\left(\frac{P_M}{P_T}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

. Attention, cette relation n'est applicable qu'à une planète supérieure.

Avec P_M*=1,88 ans*, P_T*=1 ans* et *d= 55 Mkm,* on trouve a_T= 142 Mkm, qui est une bonne valeur de l'unité astronomique.

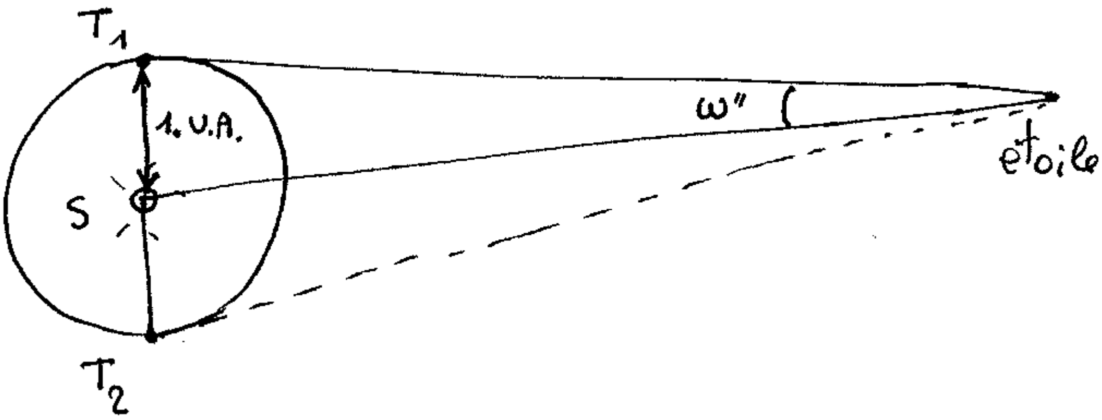
Améliorations ultérieures.
Une première amélioration a consisté à utiliser l'astéroïde Eros à la place de Mars, lors d'une opposition. Eros est passé à 19,6Mkm. L'excentricité de Eros est e_E=0.223. Sa période est E_P=1,758 ans. On trouve une valeur plus précise pour l'unité astronomique : a_T= 149 Mkm.

La meilleure précision fut obtenue en mesurant la distance Terre Vénus au moment d'une conjonction, par la méthode de l'écho radar. L'écho radar arrive 276 secondes après l'émission. L'excentricité de Vénus est négligeable et sa période sidérale est P_V=0.615 ans. La relation précédente se simplifie (e_V=0) mais le dénominateur doit être changé de signe (Planète inférieure).

Distance de la galaxie M31 par les étoiles variables Céphéides.

Parallaxe annuelle. Pour avoir la distance d'une étoile on utilise généralement la méthode des parallaxes annuelles. La distance Terre Soleil étant connue en kilomètres (C'est l'unité astronomique qui vaut 150 Mkm), la parallaxe annuelle est par définition l'angle ω sous lequel on voit l'unité astronomique depuis l'étoile considérée. Cette mesure se fait, par exemple, en observant une même étoile à six mois d'intervalle, la distance entre les deux points de visée, T_1 et T_2, étant alors de 2 U.A. (300 Mkm). (Voir la figure 11).

FIGURE 11



Le satellite astrométrique HIPPARCOS nous a donné des distances pour plusieurs étoiles variables Céphéides. Ce type d'étoile variable est observable jusqu'à l'intérieur de la galaxie d'Andromède (M31). On va pouvoir trouver ainsi la distance de cette galaxie proche.

Magnitudes et module de distance. La magnitude apparente *m* est définie à partir de l'éclat apparent *E*, par la relation de Fechner-Pogson :

$$m = -2.5 \log E + Constante$$

Pour mesurer l'éclat intrinsèque d'une étoile on définit la magnitude absolue *M*, comme la magnitude qu'aurait l'étoile si elle était située à 10 parsecs. Sachant que l'éclat varie comme l'inverse du carré de la distance nous allons établir la relation liant magnitude apparent *m*, magnitude absolue *M* et distance *d* (exprimée en parsec).

On a $E = \frac{E_o}{d^2}$; Il vient donc

$$m = -2.5 \log \frac{E_o}{d^2} + K \ .$$

K est une valeur constante arbitraire. De même on a pour la magnitude absolue :

$$M = -2.5 \log \frac{E_o}{100} + K$$

En retranchant l'une à l'autre ces deux dernières expressions on trouve la relation cherchée :

$\boxed{\mu = m - M = 5 \log d - 5}$. Attention dans cette relation *d* est en parsecs.

μ s'appelle le module de distance.

Si on peut déterminer *M*, l'observation de m nous donne directement la distance. Comment obtenir *M* ? C'est tout le problème de la détermination des distances.

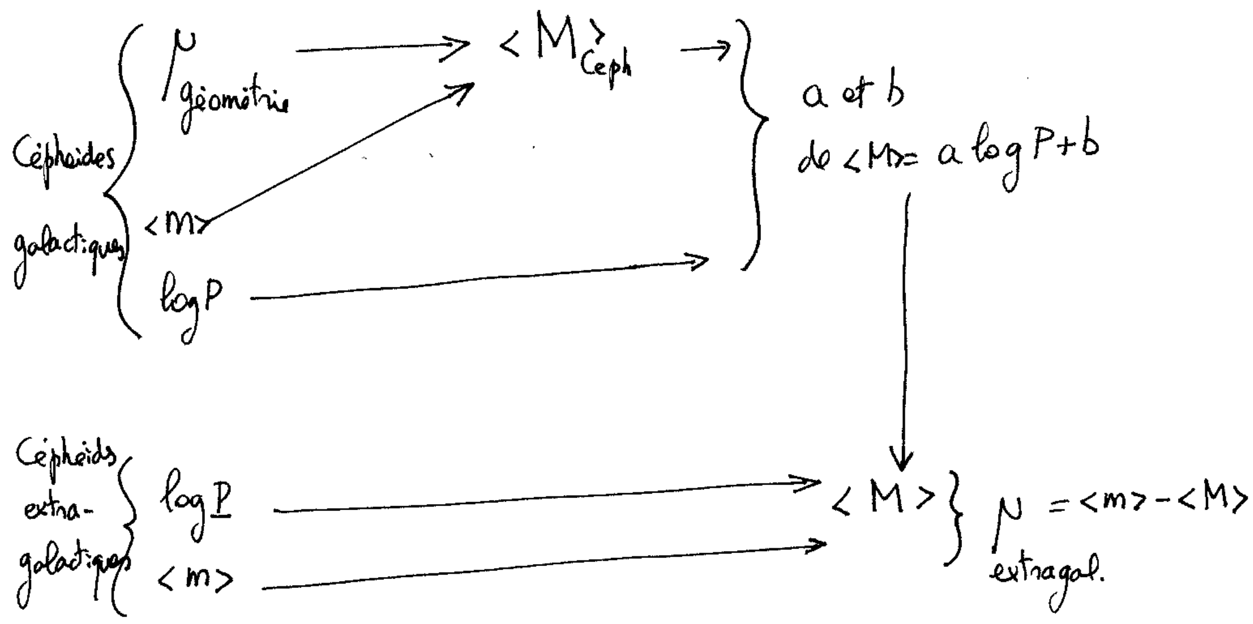
La méthodologie de la détermination des distances. Le principe général est toujours le même : on estime la magnitude absolue à partir de sa relation avec un paramètre observable. Généralement cette relation de dépendance est de la forme :

$M = a \log X + b$, où X est un paramètre observable.

Pour les étoiles variables Céphéides, X est la période de variation. Pour les galaxies X est l'énergie cinétique interne (rotation ou agitation).

La méthode générale est donnée par le schéma suivant :

SCHEMA 1



Le Tableau 1 donne les valeurs des modules de distances observées par HIPPARCOS pour des Céphéides de notre galaxie. Les périodes P et les magnitudes apparentes m sont connues. On peut donc déduire la relation période-luminosité : $M = a \log P + b$. En appliquant cette relation aux Céphéides de M31 (Tableau 2) on trouve leurs magnitudes absolues, et donc la distance de M31 (on fera la moyenne de toutes les déterminations).

TABLEAU 1 : Quelques Céphéides de notre Galaxie. Le module de distance μ a été obtenu a été obtenu par la méthode des parallaxes. Les magnitudes apparentes sont corrigées de l'extinction dans notre galaxie.

Nom de la Céphéide	logP (P en jours)	μ	$<m>_c$
BF Oph.	0,609	9,50	6,49
VY Car	1.277	11.42	6,59
T Mon	1,432	10,58	5,46
S Nor	0,989	9,92	5,86

L'application d'une régression linéaire entre $M=<m>_c - \mu$ *et logP* conduit aux coefficients suivants : a = –2,60 ; b= –1,45. La relation période-luminosité est donc :

$$M = -2{,}60 \log P - 1{,}45$$

TABLEAU 2 : Mesure d'une Céphéide de M31 (Andromède), obtenue par le Hubble Space Télescope.

Nom de la Céphéide	logP	$<m>_c$
M31 : FIII-15	1,277	19,82

L'application de la relation période luminosité à une Céphéide de M31 donne la magnitude absolue moyenne de cette étoile variable : $<M> = -4{,}77$ et donc au module de distance de M31 :

$\mu(M31) = <m>_c + 4{,}77 = 24{,}59$, ce qui correspond à une distance d=0,83 Mpc ou 2,7 million d'années de lumière.

La Méthode des galaxies "sosies" pour les galaxies lointaines

Il existe une relation liant la magnitude absolue d'une galaxie à son énergie cinétique interne. Pour les galaxies spirales, par exemple, cette énergie se mesure par la vitesse de rotation V_M. On a donc une relation (dite relation de Tully-Fisher) de la forme :

$$M = a' \log V_M + b'$$

Nous pourrions mesurer plusieurs galaxies comme M31 et tracer cette relation, pour faire comme nous l'avions fait pour les Céphéides. Il y a une méthode plus rapide (méthode des sosies) :
Si nous sélectionnons dans une base de données toutes les galaxies qui ont le même V_M que M31, nous pourrions écrire :

$\mu(M31) = m(M31) - M(M31)$, et pour une galaxie sélectionnée :
$\mu = m - M$

Puisque les galaxies ont le même V_M, elles ont toutes la même magnitude absolue en vertu de la relation de Tully-Fisher. Donc *M=M(M31).* En retranchant les deux équations ci-dessus, on tire donc :
$\mu = \mu(M31) + m - m(M31)$.
Le module de distance des galaxies sélectionnées se déduit immédiatement, de celui de M31 et de la différence des magnitudes apparentes.

Loi de Hubble. Du module de distance on peut déduire la distance r (en Mpc). Si on porte la vitesse des galaxies en fonction des distances, on trouve qu'il y a une relation linéaire, la loi de Hubble, qui obéit à la relation simple :

$V = H.r$

H est la constante de Hubble. Elle se mesure en (km/s)/Mpc. C'est en fait l'inverse d'un temps. L'inverse de la constante de Hubble peut nous donner l'ordre de grandeur de l'âge de l'univers. Essayons de le comprendre. Pour cela nous supposerons que l'espace temps est la surface d'une sphère. La distance entre deux galaxies, exprimée en fonction du rayon de la sphère, est simplement : $r = R.\alpha$, où α est l'angle au centre découpant la longueur r. Si le rayon varie en fonction du temps, la distance va varier en fonction du temps. Calculons la vitesse à laquelle les deux galaxies s'éloignent l'une de l'autre :
$V = \frac{dr}{dt} = \frac{d(R\alpha)}{dt} = \alpha \frac{dR}{dt}$.
Remplaçons α par *r/R* et écrivons, comme il est de coutume la dérivée de *R* par rapport au temps par $\dot{R}$ .On trouve alors :
$V = \frac{\dot{R}}{R}.r$, qui est l'expression de la loi de Hubble, dans laquelle $H = \frac{\dot{R}}{R}$.

Il faut évaluer $\dot{R}$ en fonction du temps. La relation la plus simple que l'on puisse imaginer pour la variation de R est une loi linéaire : $R = a.t + b$. Si on impose que le rayon de l'univers soit nul à l'origine du temps. Cette condition donne *b=0*. Donc *R=a.t*. On peut calculer $H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{t}$.
On voit que la valeur de *H* donne le temps écoulé depuis l'origine, c'est ce qu'on définira comme l'âge de l'univers (temps de Hubble). Une approximation, quand les unités ont été correctement transformées, est :
$T = \frac{1000}{H}$, où H est en (km/s)/Mpc et *T*, le temps de Hubble, en milliards d'années. Avec la valeur *H*=66 (km/s)/Mpc, on trouve que l'âge de l'univers serait environ de 15 milliards d'années.

Application avec la base de données HYPERLEDA.

Connectez-vous sur cette base de données avec votre navigateur préféré, à l'adresse suivante :
http://www-obs.univ-lyon1.fr/hypercat

Chercher d'abord les caractéristiques de M31, alias NGC224 en utilisant l'option "Search by name". Entrer le nom (MESSIER 31 ou NGC224). Puis cliquez sur "Mean data : LEDA". Vous obtenez toutes les caractéristiques de cette galaxie.
Notez sa vitesse de rotation "logavmm" et sa magnitude bleue, totale, corrigée "btc".
On trouve btc=3,2 et logavmm=2,393 (ce qui signifie que la vitesse maximum de rotation est de 247 km/s, dans le plan du disque galactique de M31).

La sélection des galaxies de même logavmm se fait par une requête SQL (Standard Query Language) disponible depuis le menu principal avec l'option "SQL search". La syntaxe est simple :

SELECT *liste des paramètres à sélectionner* WHERE *liste des conditions de sélection*

Nous avons besoin de la magnitude btc pour calculer le module de distance et de la vitesse radiale pour pouvoir calculer la constante de Hubble. Nous utiliserons par exemple vvir, vitesse corrigée des mouvements perturbateurs, en particulier notre mouvement vers l'amas Virgo (d'où le nom vvir). Nous demanderons aussi le nom de l'objet (par exemple le numéro pgc, du Principal Galaxy Catalog).

Pour sélectionner les galaxies de même vitesse de rotation que M31 nous utiliserons la condition de sélection : abs(logavmm-2.393) < 0.01. Nous pourrons aussi mettre une limite sur la vitesse radiale pour ne pas prendre des objets trop proches (loi de Hubble moins stable) ou trop distants (biais statistiques de "Malmquist");

La requête devient donc :

SELECT pgc,btc,vvir WHERE abs(logavmm-2.393) < 0.01 and vvir < 5000

On obtient le fichier chercher. Pour chaque objet on peut calculer le module de distance, donc la distance, et déduire finalement la constante de Hubble vvir/distance. La constante de Hubble moyenne trouvée varie selon la valeur à laquelle on coupe les vitesses radiales vvir. Cela provient du biais de Malmquist qui tend à faire sous-estimer les distances à grandes distances.

Dans la base de données un exemple de calcul direct de la constante de Hubble H est donné.
Les explications sur la méthode sont accessibles dans cette exemple.

On trouve environ H=65 (km/s)/Mpc, soit un âge de l'univers de 1000/65= 15 milliards d'années.