# *REGLES DU MOUVEMENT en général.*

Par M. VARIGNON.

DEpuis le commencement de ce siécle que la plufpart des Philofophes, au lieu de fe contenter de difcours vagues, comme l'on faifoit auparavant, ont tâché d'établir leurs raifonnemens fur des principes folides tirez de la Statique & de la Mécanique ; chacun s'eft appliqué à éxaminer avec foin la fcience du mouvement, fans laquelle il eft impoffible de pénétrer dans les fecrets de la nature. Galilée fut le premier qui donna des regles du mouvement dans ces fameux dialogues qui lui ont acquis tant de réputation. Après lui, Defcartes, le P. Fabri, Borelli, & quantité d'autres, ont compofé de fçavans Traitez fur le même fujet ; & l'on a fait en cinquante ans plus de progrès dans la fcience du mouvement, que l'on n'y en avoit fait auparavant en plufieurs fiécles. 31. Décembre 1692.

Cependant il femble que l'on n'a pas affez examiné le mouvement en général. Tous ceux qui en ont écrit, n'en ont traité qu'autant qu'ils en avoient befoin pour les ouvrages particuliers qu'ils avoient en vûë ; & faute de reprendre la chofe d'affez haut, ils ont été obligez de fuivre mille détours pour prouver les théorêmes dont ils avoient befoin, & fouvent même ils fe font contentez de les fuppofer.

Pour remedier à cet inconvénient, M. Wallis a commencé fa Mécanique par un Traité du mouvement en général ; mais le chemin qu'il a pris, ne l'a mené encore qu'à fort peu de Regles ; outre qu'il ne les prouve toutes que par induction, & jamais d'une maniere générale & univerfelle.

M. Varignon ayant eu occafion d'éxaminer cette matiere, a trouvé une route qui l'a conduit par des démonstrations fort aisées, & presque toujours les mêmes, à un fort grand nombre de Régles si générales que toutes celles de M. Wallis, aussi-bien que le Traité entier *de motu æquabili* de Galilée, & presque tout ce qu'en ont dit le P. Fabri, Borelli, & les autres, ne sont que des corollaires très-limitez, ou ne sont que partie des Regles 6, 7, 10, 18, 19, 20, 22, qu'il tire de son principe général, que voici en peu de mots.

I. Principe : *Dans toutes sortes de mouvemens, soit qu'ils se fassent en roulant ou en glissant, soit en ligne droite ou en ligne courbe, soit que ces mouvemens soient uniformes, ou accelerez ou retardez, dans toutes les proportions & dans toutes les variations imaginables; la somme des forces qui font le mouvement dans tous les instans de sa durée, est toujours proportionelle à la somme des chemins ou des lignes que parcourent tous les points du corps mû.*

II. Telle est en général la Regle fondamentale de tous les mouvemens imaginables; mais parce que l'application en seroit infinie dans les mouvemens qui se font en roulant, il suffit présentement d'en conclure à l'égard de ces sortes de mouvemens, qu'*il faudroit plus de force pour faire rouler un corps, par exemple une boule, sur un plan mathématique, que pour l'y faire glisser de la même vitesse par rapport au terme de ce mouvement; & qu'il en faudroit d'autant plus que la somme des lignes, que décrivent tous les points de ce corps, seroit plus grande que le produit de ce même corps par le chemin de son centre de gravité.*

III. Pour tous les autres mouvemens qui se font seulement en glissant, il suit du même principe *(art. 1.)* que *ce qu'il faut de force en tout pour ces sortes de mouvement, soit qu'on les suppose accelerez ou retardez; en un mot, variez dans toutes les proportions imaginables, est toujours proportionnel au produit de la masse du corps mû, par le chemin que son centre de gravité aura parcouru.*

IV. Enfin, ſi le corps qu'on ſuppoſe gliſſer, ſe meut toujours uniformément, il ſuit encore de l'article premier, que *le produit de la durée de ce mouvement par la force qui l'a commencé, eſt toujours proportionnel au produit de la maſſe du corps mû, par la longueur du chemin qu'il aura parcouru, c'eſt-à-dire, par le chemin de ſon centre de gravité.* Ainſi lorſque les forces $a$ & $b$, demeurant toujours les mêmes, c'eſt-à-dire uniformes, font gliſſer les corps $M$ & $N$, dont les maſſes ſont $e$ & $g$, par les eſpaces $f$ & $h$, pendant les temps $c$ & $d$; il eſt toujours vrai que $ac.\,db :: ef.\,gh.$

$$\text{V. Donc}\left\{\begin{array}{l} a.\,b :: efd.\,ghc. \\ c.\,d :: efb.\,gha. \\ e.\,g :: ach.\,bdf. \\ f.\,h :: acg.\,bde. \end{array}\right.$$

Ces quatre Regles ſont autant de corollaires généraux de l'article 4. dont voici l'application à differentes hypotheſes. Pour abréger, on continuera de ſe ſervir des lettres ſuivantes, au lieu des termes de *corps*, *maſſe*, *eſpace*, *temps*, *force* & *vîteſſe*.

| Corps. | Maſſe. | Eſpace. | Temps. | Force. | Vîteſſe. |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$. | $e$. | $f$. | $c$. | $a$. | $x$. |
| $N$. | $g$. | $h$. | $d$. | $b$. | $z$. |

$$\text{VI. Si } a = b\text{, on aura}\left\{\begin{array}{l} c.\,d :: ef.\,gh. \\ e.\,g :: ch.\,df. \\ f.\,h :: cg.\,de. \end{array}\right.$$

Réciproquement, ſi les temps, ou les maſſes, ou les eſpaces parcourus, ſont comme dans ces Analogies; les forces ſeront égales entre elles: & c'eſt là le fondement général de toute la Statique de M. Deſcartes.

VII. Si $c = d$, on aura $\begin{cases} a.b :: ef.gh. \\ e.g :: ah.bf. \\ f.h :: ag.be. \end{cases}$

Réciproquement, si les forces, ou les masses, ou les espaces parcourus, sont comme dans ces analogies; les temps seront égaux. La converse de ceci, c'est-à-dire, tout cet article, peut encore servir de principe pour démontrer les machines à la maniere de M. Descartes.

VIII. Si $e = g$, on aura $\begin{cases} a.b :: fd.hc. \\ f.h :: ac.bd. \\ c.d :: fb.ah. \end{cases}$

Réciproquement, si les forces, ou les espaces, ou les temps, sont comme dans ces analogies; les masses des corps mûs seront égales.

IX. Si $f = h$, on aura $\begin{cases} a.b :: ed.gc. \\ e.g :: ac.bd. \\ c.d :: eb.ag. \end{cases}$

Réciproquement, si les forces, ou les masses, ou les temps, sont comme dans ces analogies; les espaces parcourus seront égaux entre eux.

X. Si $a.b :: \begin{Bmatrix} e. & g. \\ f. & h. \end{Bmatrix}$ on aura $c.d :: \begin{Bmatrix} f. & h. \\ e. & g. \end{Bmatrix}$ Et réciproquement, Si $c.d :: \begin{Bmatrix} f. & h. \\ e. & g. \end{Bmatrix}$ on aura $a.b :: \begin{Bmatrix} e. & g. \\ f. & h. \end{Bmatrix}$

XI. Si $a.b :: c.d.$ on aura $\begin{cases} e.\ g :: aah.bbf :: cch.\ ddf. \\ f.\ h :: aag.bbe :: ccg.\ dde. \\ ef.gh :: aa.\ bb :: cc.\ dd. \end{cases}$

Réciproquement, si les masses des corps mûs, ou les eſpaces parcourus, ou les produits des maſſes par les eſpaces, c'eſt-à-dire, les quantitez de mouvement des corps $M$ & $N$, ſont comme dans ces dernieres analogies; les forces ſeront entre elles comme les temps. Ce qui peut encore ſervir de principe pour expliquer les machines comme cy-deſſus, *art.* 6. & 7.

XII. Si $e.g::f.h.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} a.\ b\ ::ffd.hhc.:::eed.gge. \\ c.\ d\ ::ffb.hha.:::eeb.gga. \\ ac.bd::ff.\ hh\ ::ee.\ gg. \end{array}\right.$

Réciproquement, ſi les forces, ou les temps, ou les produits des forces par les temps, ſont comme dans ces dernieres analogies; les maſſes ſeront entre elles comme les eſpaces parcourus.

XIII. Si $a.b::g.e.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} c.\ d\ ::eef.ggh::bbf.\ aah. \\ f.\ h\ ::ggc.eed\ ::aac.bbd. \\ ch.df::ee.\ gg.\ ::bb.\ aa. \end{array}\right.$

Réciproquement, ſi les temps, ou les eſpaces parcourus, ou les produits des temps pris directement, par les eſpaces réciproquement pris, ſont comme dans ces dernieres analogies; les forces ſeront entre elles en raiſon réciproque des maſſes.

XIV. Si $a.\ b::h.f.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} c.\ d\ ::ffe.\ hhg::bbc.aag. \\ e.\ g\ ::aac.bbd::hhc.ffd. \\ de.eg::aa\ bb.\ ::hh.\ ff. \end{array}\right.$

Réciproquement, ſi les temps, ou les maſſes, ou les produits des maſſes priſes directement, par les temps réciproquement pris, ſont comme dans ces dernieres analogies; les forces ſeront entre elles en raiſon réciproque des eſpaces parcourus.

XV. Si $c.d::g.e.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} a.\ b\ ::eef.\ ggh::ddf.cch. \\ f.\ h\ ::agg.bee::acc.bdd. \\ bf.ah::cc.\ dd\ ::gg.\ ee. \end{array}\right.$

Reciproquement, ſi les forces mouvantes, ou les eſpaces parcourus, ou les produits des eſpaces pris directement, par les forces réciproquement priſes, ſont comme dans ces dernieres analogies; les temps des mouvemens ſeront entre eux en raiſon réciproque des maſſes des corps mûs.

XVI. Si $c.d :: h.f.$ on aura $\begin{cases} a.\ b. :: ffe.\ hhg :: dde.\ ccg. \\ e.\ g. :: abh.\ bff. :: acc.\ bdd. \\ eb.\ ag :: cc.\ dd. :: hh.\ ff. \end{cases}$

Réciproquement, ſi les forces mouvantes, ou les maſſes des corps mûs, ou les produits des maſſes priſes directement par les forces réciproquement priſes, ſont comme dans ces dernieres analogies; les temps ſeront entr'eux en raiſon reciproque des eſpaces parcourus.

XVII. Si $a.b :: d.c.$ l'on aura $e.g :: hf.$ Et réciproquement ſi $eg :: hf.$ on aura $a.b :: d.c.$ Ainſi dans les machines ayant toûjours $d=c$; on y aura auſſi $a=b$, c'eſt-à-dire, l'équilibre, dès qu'on aura fait $eg :: hf.$

On pourroit encore deſcendre dans un plus grand détail, mais en voilà aſſez pour juger de la fécondité de l'article 4, & pour faire voir combien il eſt facile de trouver par cette méthode tous les rapports qui peuvent être entre les *forces mouvantes*, entre les *maſſes* des corps qu'elles meuvent, entre les *temps* qu'elles y employent, & enfin entre les *eſpaces* que ces corps parcourent. Pour ce qui eſt des *viteſſes*, dont on n'a point encore parlé, en voici les régles tirées du même article 4.

XVIII. En général $x.z :: \frac{fh.}{cd.} :: fd.\ hc. :: \frac{de.}{hf.}$

XIX. Donc en général encore $\begin{cases} c.\ d :: zf.\ hx. \\ f.\ h :: xc.\ zd. \\ a.\ b :: ex.\ gz. \\ e.\ g :: az.\ bx. \\ x.\ z :: ag.\ be. \end{cases}$

$$\text{XX. Si} \left\{ \begin{array}{c} a=b \\ e=g \\ c=d \\ f=h \end{array} \right\} \text{on aura} \left\{ \begin{array}{cc} g. & e \\ a. & b \\ f. & h \\ d. & c \end{array} \right\} :: x.z. \text{ Et réci-}$$

proquement si ces analogies sont vrayes, les égalitez précedentes le sont aussi. L'équilibre se trouve donc encore toûjours dans une machine où l'on fait $g.e :: x.z.$ Et c'est là ce que Galilée (*Syst. Cosm. Dialog.* 2. *pag.* 298. *&c. edit. Lond.* 1663.) a pris pour le premier principe de Statique.

$$\text{XXI. Si} \left\{ \begin{array}{cc} e. & g \\ c. & d \\ b. & a \\ h. & f \end{array} \right\} :: x.\ z. \text{ on aura} \left\{ \begin{array}{l} a.b :: xx.\ zz. \\ f.\ h :: cc.\ dd. \\ e.g :: zz.\ xx. \\ c.d :: ff.\ hh. \end{array} \right.$$

Réciproquement, si ces dernieres analogies sont vrayes, les premieres le sont aussi.

$$\text{XXII. Si} \left\{ \begin{array}{c} a.\ b :: e.\ g. \\ \text{ou} \\ c.\ d :: f.\ h. \end{array} \right\} \text{on aura } x=z.$$

$$\text{Ou si } x=z, \text{ on aura} \left\{ \begin{array}{c} a.\ b :: e.\ g. \\ \& \\ c.\ d :: f.\ h. \end{array} \right\}$$

$$\text{XXIII. Si} \left\{ \begin{array}{c} a.b :: f.h. \\ \text{ou} \\ e.g :: c.d. \end{array} \right\}$$

$$\text{on aura} \left\{ \begin{array}{l} x.z :: fg.\ eh :: ad.\ c.b. \\ e.g :: fz.\ hx. \\ c.d :: az.\ bx. \\ f.\ h :: ex.\ gz. \\ a.b :: cx.\ dz. \end{array} \right.$$

Réciproquement, si ces dernieres analogies sont vrayes, les premieres le sont aussi.

XXIV. Si $a.b :: c.d.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} x.z :: gc.\ ed. \\ c.d :: ex.\ gz. \\ e.g :: cz.\ dx. \end{array}\right.$

Réciproquement, si les vîtesses, ou les masses, ou les temps, ou les forces, sont comme dans ces dernieres analogies; les forces seront entr'elles comme les temps: ce qui donne encore le principe de Galilée, dont on vient de parler *art.* 20.

XXV. Si $e.g :: f.h.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} x.z :: ah.\ bf. \\ a.b :: fx.\ hz. \\ f.h :: az.\ bx. \end{array}\right.$

Réciproquement, si les vîtesses, ou les forces, ou les masses, ou les espaces parcourus, sont comme dans ces dernieres analogies; les masses des corps mûs seront entr'elles comme les espaces parcourus.

XXVI. Si $a.b :: g.e.$ on aura $x.z :: \left\{\begin{array}{ll} gg. & ee. \\ aa. & bb. \end{array}\right\}$ Et réciproquement, si $x.z :: \left\{\begin{array}{ll} gg. & ee. \\ & \text{ou} \\ aa. & bb. \end{array}\right\}$ on aura $a.b :: g.e.$

XXVII. Si $c.d :: h.f.$ on aura $x.z :: \left\{\begin{array}{ll} ff. & hh. \\ dd. & cc. \end{array}\right\}$ Et réciproquement, si $x.z :: \left\{\begin{array}{ll} ff. & hh. \\ & \text{ou} \\ dd. & cc. \end{array}\right\}$ on aura $c.d :: h.f.$

XXVIII. Si $a.b :: h.f.$ on aura $\left\{\begin{array}{l} x.z :: hg.\ fe. \\ e.g :: zh.\ xf. \\ h.f :: xe.\ zg. \end{array}\right.$

Réciproquement, si les vîtesses, ou les masses, ou les forces, ou les espaces, sont comme dans ces dernieres analogies;

analogies; les forces seront en raison réciproque des espaces.

$$\text{XXIX. Si } c.d :: g.e. \text{ on aura } \begin{cases} x.z :: ac.bd. \\ a.b :: dx.cz. \\ c.d :: bx.az. \end{cases}$$

Réciproquement, si les vîtesses, ou les forces, ou les temps, ou les masses, sont comme dans ces dernieres analogies; les temps seront en raison réciproque des masses.

$$\text{XXX. Si } \left\{ \begin{matrix} a.b :: d.c. \\ \text{ou} \\ c.g :: h.f. \end{matrix} \right\} \text{ on aura } \begin{cases} x.z :: af.bh :: dg.ec. \\ a.b :: hx.fz. \\ d.c :: ex.gz. \\ e.g :: dz.cx. \\ h.f :: az.bx. \end{cases}$$

Réciproquement, si les vîtesses, ou les forces, ou les temps, ou les masses, ou les espaces parcourus, sont comme dans ces dernieres analogies; les masses seront en raison réciproque des espaces, & les forces en raison réciproque des temps : ce qui donne encore ce que Descartes a pris pour le premier principe de Statique.

Il y a encore une infinité de choses à remarquer sur les differens rapports des vîtesses; mais on ne les met point ici, parce qu'il est présentement aisé à tout le monde de les trouver, en faisant l'usage que l'on vient de voir de cette méthode.