répondent encore à un fort grand volume d'air : il n'eſt donc pas étrange qu'il s'éleve auſſi haut que Geſner le rapporte. Il dit en avoir vû un s'élever ſi haut en l'air, qu'il ne paroiſſoit pas plus gros qu'une hyrondelle, quoique cet oyſeau ſoit plus gros qu'un cygne.

Livre 3. pag. 570. édition de Francfort.

DES POIDS QUI TOMBENT ou qui montent le long de pluſieurs plans contigus.

Par M. VARIGNON.

31. Décembre 1693.

IL ne faut qu'une médiocre connoiſſance des Mécaniques, pour voir de quelle conſéquence il eſt de ſçavoir au juſte, ce qui doit arriver aux corps qui tombent ou qui montent le long de pluſieurs plans contigus. En voici la propoſition fondamentale, par laquelle M. Varignon va faire voir, ainſi qu'il l'a promis dans le Mémoire du 30. Juin dernier, combien on s'eſt mépris juſqu'ici en cette matiere, de ſuppoſer avec Galilée, que lorſqu'un corps tombe le long de pluſieurs plans contigus, la vîteſſe qu'il a au concours de ces plans eſt la même ſuivant la direction de celui ſur lequel il paſſe, que celle qu'il avoit pour ſuivre le plan qu'il quitte.

PROPOSITION I.

Au concours de deux plans contigus, ce qu'un corps qui paſſe de l'un à l'autre, a de vîteſſe pour ſuivre celui le long duquel il tombe, eſt à ce qu'il en a ſuivant la direction de celui ſur lequel il paſſe, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'angle que ces plans ſont entre eux.

Fig. 1. 2.

Démonſtration. Soient les plans contigus & inclinez l'un à l'autre A C & C E, le long deſquels un corps tombe du point A, c'eſt-à-dire, en commençant en A. Par ce point

A soit l'horizontale A B qui rencontre le plan E C prolongé en B. Soit ensuite sur C B, comme diametre, le demi-cercle C H B qui rencontre C A prolongé en H, d'où tombe H K perpendiculaire à C B. Cela fait, M. Varignon dit qu'au concours C des plans A C & C E, ce que le corps qui tombe de A en C le long de A C, a de vitesse pour suivre la direction C F de ce plan A C, s'il n'en etoit point empêché par le plan C E, est à ce qu'il en a suivant le plan C E sur lequel il passe, comme H C à C K, c'est-à-dire, comme le sinus total est au sinus du complément C H K de l'angle H C K que ces plans font entre eux.

Pour le démontrer, ajoutez le parallélogramme rectangle X Z, dont C F soit la diagonale. Il est visible que la vitesse acquise de A en C suivant C F, est la même au point C que si elle venoit du concours de deux forces capables de donner en ce point au corps qui tombe, des vitesses suivant C X & C Z, lesquelles fussent à celle qu'il a au point C suivant C F, comme les côtez C X & C Z du parallélogramme X Z sont à la diagonale C F. Or en ce cas la force qui pousseroit ce corps suivant C Z, étant soûtenuë toute entiere par le plan E C qui lui résiste *(hyp.)* perpendiculairement, il ne resteroit plus à ce corps que l'impression de la force suivant C E, pour suivre cette ligne d'une vitesse qui seroit à celle qui lui résulteroit de leur concours, c'est à-dire, *(hyp.)* à celle qu'il a effectivement en C suivant C F après sa chute de A en C, comme C X à C F. Donc la vitesse que la chute de A en C donne à ce corps au point C pour suivre C F, est à ce que la rencontre du plan C E lui en laisse suivant sa direction C E, comme C F à C X. Or à cause que les triangles *(hyp.)* rectangles F C X & H C K sont semblables, C F est à C X comme C H à C K. Donc la vitesse que le corps qui tombe de A en C a suivant CF, est à ce qui lui en reste suivant CE, comme C H est à C K, c'est-à-dire, comme le sinus total eſt au ſinus du complément de l'angle A C B que les plans A C & C E font entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire 1. De là on voit que ſi l'angle des plans A C B eſt, par exemple, de 60. deg. le corps qu'on ſuppoſe tomber le long de A C E, n'aura au point C ſuivant C E que la moitié de la viteſſe qu'il auroit en ce point ſuivant C F ſans la rencontre du plan C E. On voit même que cette viteſſe ſuivant C E diminuëra tellement au point C, à meſure que l'angle A C B s'ouvrira, que lorſque cet angle ſera droit, la chute de ce corps de A en C ne lui donnera plus du tout de viteſſe ſuivant C E. Il s'en faut donc bien que la viteſſe d'un corps qui paſſe d'un plan à un autre, ne ſoit la même au concours de ces plans ſuivant la direction de l'un & de l'autre, comme Galilée l'a inſinué par un *quod idem eſt* dans la démonſtration du Theorême 10. de ſon Traité *De motu naturaliter accelerato*, & comme il le ſuppoſe dans toute le reſte de ce Traité, auſſi-bien que tout ce que M. Varignon a vû d'Auteurs ſur cette matiere.

Corol. 2. Puiſque A B eſt *(hyp.)* horizontale, les viteſſes acquiſes en C, ſuivant C E par la chute d'un corps de B en C, & ſuivant C F par la chute du même corps de A en C, ſont* égales. Donc en ce point C la viteſſe acquiſe ſuivant C E par la chute de ce corps de B en C, ſeroit à ce qui lui en reſte ſuivant la même direction C E après la chute de A en C, comme C H à C K. Or puiſque ** les quarrez des viteſſes acquiſes en C ſuivant C E par les chutes d'un même corps, faites de B en C & de K en C, ſeroient comme les eſpaces parcourus B C & K C, leſquels ſont entre eux comme les quarrez de C H & de C K à cauſe de C H moyenne proportionnelle entre B C & K C; ces viteſſes ſont auſſi entre elles comme C H & C K; c'eſt-à-dire, que la viteſſe acquiſe en C ſuivant C E par la chute de B en C, ſeroit auſſi à la viteſſe acquiſe au même point C ſuivant la même direction C E par la chute du même corps de K en C, comme C H à C K. Donc la viteſſe en C ſuivant

* *Mem. du 30. Juin 1693. art. 3. p. 358. n. 2.*

** *Ibid. n. 1.*

ſuivant C E, acquiſe par chute de A en C, eſt la même que ſi le corps qui a fait cette chute, fut tombé de K en C en commençant en K ; & non pas la même que s'il fût tombé de B en C, comme on le ſuppoſe ordinairement.

Corol. 3. Cela étant, il eſt aiſé de déterminer de quelle hauteur un corps devroit tomber pour acquerir le long d'un même plan la viteſſe que ſa chute par pluſieurs plans contigus lui donne à la fin de celui-là. Par exemple, que tel corps qu'on voudra, tombe de A en D le long de A B C D fait de plans contigus. Par le point A, où commence ſa chute, ſoit l'horizontale A E qui rencontre les plans C B & D C prolongez en G & en E : ſoit enſuite ſur le diamétre B G le demi cercle B H G qui rencontre B A prolongé en H, duquel point H tombe H K perpendiculairement ſur B G. Du point K ſoit encore l'horizontale K N qui rencontre C E en N ; & ſur le diamétre C N ſoit auſſi le demi cercle C L N qui rencontre B G en L. Enfin du point L ſoit L M perpendiculaire ſur C N. Cela fait, on voit (*Corol.* 2.) que lorſqu'un corps tombe de A en B, la viteſſe qu'il a en B ſuivant B C, eſt la même que s'il tomboit du point K le long de K C ; & que s'il tomboit ainſi du point K, la viteſſe qu'il auroit en C ſuivant C D, ſeroit auſſi la même que s'il tomboit du point M le long de M C ; & ainſi du reſte. Donc la viteſſe de ce corps en tombant du point A le long de A B C D eſt la même en D ſuivant C D, que s'il tomboit du point M le long de M D ; & non pas la même que s'il tomboit du point E le long de E D, ou de ſa hauteur E F, comme on l'a encore toujours ſuppoſé juſqu'ici. *Fig.* 3. 4.

Voilà pour ce qui regarde la chute des corps, le long de pluſieurs plans contigus, & ſurquoi M. Varignon a rectifié & rendu général tout ce que Galilée a dit touchant cette matiere ; mais la brieveté de ce Mémoire ne permet pas d'entrer dans tout ce détail : c'eſt pourquoi M. Varignon paſſe à ce qui doit arriver aux corps qui montent le long de plusieurs plans contigus.

PROPOSITION II.

Fig. 1. 2. *Les choses demeurant les mêmes que dessus, si le corps qui est tombé de A en E le long de A C E, remonte de E vers A suivant E C A, & qu'il parte du point E avec la même vitesse suivant E C, qu'il avoit en ce même point E suivant C E après sa chûte de A en E par A C E; la vitesse que ce corps aura en C suivant C A, sera à celle que sa chûte de A en C lui avoit donnée en ce même point C suivant C F, comme le quarré du sinus du complément de l'angle des plans est au quarré du sinus total.*

Démonstration. En descendant on a trouvé (*Prop.* 1.) qu'après la chûte de A en C, la vitesse en C vers C F étoit à ce qu'il en résulte en ce même point C vers C E au corps qui tombe, comme C F est à C X. On trouvera de même, c'est-à-dire, par un raisonnement tout semblable en remontant, que la vîtesse en C suivant C B est à ce que le corps qui remonte, en a en ce même point C suivant le plan C A, sur lequel il repasse, comme C B est à C H. Or ce corps étant (*hyp.*) reparti de E vers C avec la même vîtesse suivant E C qu'il avoit acquise en E suivant C E par sa chûte de A en E le long de A C E, c'est-à-dire, (*Cor.* 2. *Prop.* 1.) avec la même vîtesse qu'il auroit acquise en tombant du point K, il aura encore en remontant la même vîtesse en C vers C K, qu'il auroit en ce même point C vers C E en descendant de K en C; & par conséquent aussi la même (*Cor.* 2. *Prop.* 1.) que sa chûte de A en C lui avoit donnée en ce même point C vers C E. Donc la vîtesse que la chûte de A en C donne en C vers C F au corps qui tombe, est à celle qu'il a en ce même point C vers C B en remontant de la maniere qu'on le suppose, comme C F est à C X; & cette vîtesse-ci est à celle que ce corps a en C suivant C A en remontant, comme C B à C H, ou encore, à cauſe des triangles ſemblables F C X & B C H, comme C F à C X. Multipliant donc ces deux analogies par ordre, on trouvera que la vîteſſe acquiſe en C vers C F par la chûte de A en C, lorſque le corps tombe, eſt à celle de ce corps en ce même point C vers C A, lorſqu'il remonte, comme $\overline{CF}^2$ à $\overline{CX}^2$, ou comme $\overline{CH}^2$ à $\overline{CK}^2$, c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus du complément de l'angle des plans. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire. 1. Puiſque la vîteſſe en C ſuivant C F, acquiſe par la chûte de A en C, eſt à la vîteſſe en ce même point C ſuivant C A, en remontant de la maniere qu'on le vient de dire, comme $\overline{CH}^2$ à $\overline{CK}^2$, c'eſt-à-dire, comme C B à C K, ou (en prenant C L égale à C K) comme C B à C L; le quarré de la premiere de ces vîteſſes ſera au quarré de la ſeconde, comme $\overline{CB}^2$ à $\overline{CL}^2$, c'eſt-à-dire, en faiſant L M perpendiculaire ſur C B, comme C B à C M, ou (en faiſant M N parallele à A B) comme A C à C N. Or A C & C N ſont a comme les quarrez des vîteſſes que les chûtes d'un même corps, commencées en A & en N, le long de A C & de N C, lui donneroient en C ſuivant C F; & de plus la premiere des vîteſſes en queſtion, c'eſt-à-dire, celle qui étoit ſuivant C F en deſcendant, a été *(hyp.)* acquiſe par la chûte de A en C. Donc l'autre vîteſſe ſuivant C A en remontant, ſera auſſi la même que celle que ce corps auroit acquiſe en C ſuivant C F par ſa chûte de N en C le long de N C; ainſi ce corps ne doit remonter qu'en N, quoiqu'il ait commencé au point E à remonter avec la même viteſſe ſuivant E C qu'il avoit acquiſe ſuivant C E par ſa chûte de A en E le long de A C E.

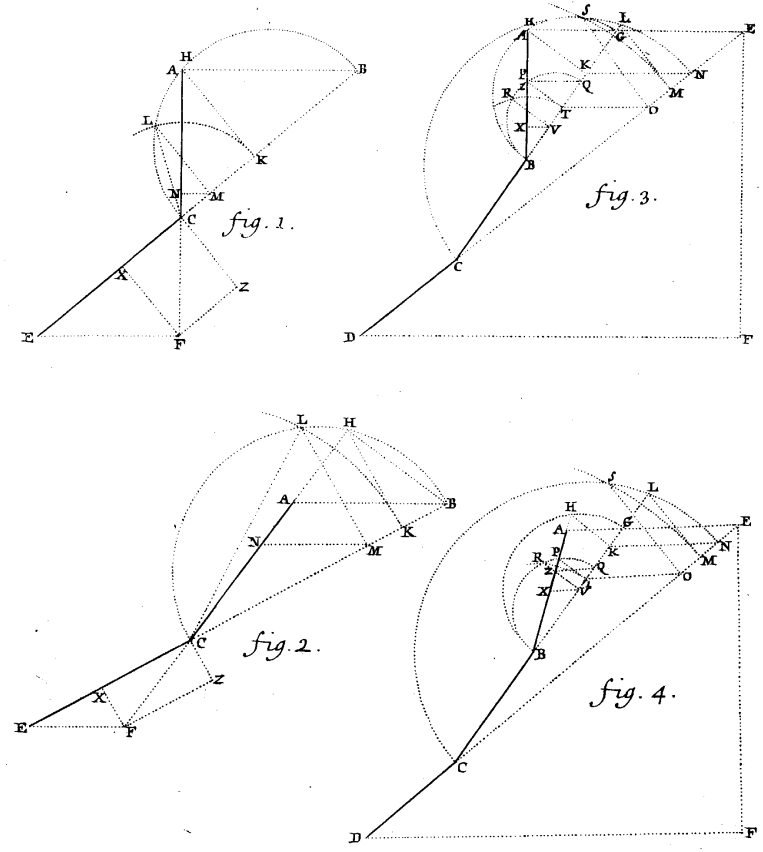
a *Mem. du 30 Juin 1693. art. 3. p. 358. n. 1.*

Corol. 2. De là on voit qu'un corps, qui après être tombé le long de pluſieurs plans contigus remonteroit le long de ces mêmes plans avec la même vîteſſe qu'il auroit acquiſe à la fin de ſa chûte, ne remonteroit jamais ſi haut

Fig. 3. 4. qu'il feroit tombé. Par exemple, qu'un corps tombé de A en D le long des plans A B C D, remonte de D vers A le long de ces mêmes plans avec la même vîteſſe en D ſuivant D C qu'il avoit acquiſe en ce même point D ſuivant C D par ſa chûte de A en D. Si l'on ajoûte aux figures 3. & 4. l'arc M S fait du centre C, avec S O tirée perpendiculairement ſur C N du point S où l'arc M S rencontre le demi-cercle N S C; de plus l'horizontale O T qui rencontre en T la ligne C G ſur laquelle s'éleve la perpendiculaire T P qui rencontre en P la ligne A B à laquelle on fait de même la perpendiculaire P Q qui rencontre B G en Q; enfin ſur le diamétre B Q le demi-cercle B P Q qui rencontre A B en P, & du centre B l'arc T R qui rencontre le demi-cercle B P Q en R, duquel point la ligne R V tombe ſur B G perpendiculairement en V, d'où part V X paralléle à l'horizontale Q Z : Cette addition fera voir (*Cor.* 1.) que ce corps ne doit remonter qu'en X, & non pas en A, comme l'ont ſuppoſé juſqu'ici tout ce que M. Varignon a vû d'Auteurs ſur cette matiere.

Remarque. Les chûtes faites le long des ſurfaces courbes, étant regardées comme faites le long d'une infinité de plans contigus, il paroît d'abord que leur courbure doit cauſer à chaque point quelque perte de viteſſe aux corps qui tombent ou qui montent le long de ces mêmes ſurfaces. Mais dès qu'on fait réflexion que toutes ces pertes ne ſont que des differentio-differentielles par rapport à la vîteſſe entiere, on voit auſſi-tôt que leur ſomme (bien que le nombre en ſoit infini) ne peut jamais faire qu'une differentielle de vîteſſe; ce qui n'ôte rien à la vîteſſe entiere des corps qui tombent ou qui montent le long de ces ſurfaces courbes. Ainſi quoique ce qu'on en a démontré juſqu'ici, en conſéquence de la ſuppoſition [a] de Galilée, ſoit ſur un faux ſuppoſé, il ne laiſſe pourtant pas d'être vrai; parce que la ſuppoſition eſt ici au terme de ſa fauſſeté.

[a] *Dem Th. 10. De motu nat. accel.*



Rec. de l'Acad. T.X. Pl. XVIIII. p. 444.