

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 z z l l v v h h + 2 y z z l l h v v - s s y y l l v v \\
 - 2 z y s l h h v v - 4 y y s z l h v v + s s y^2 v v \\
 + s s y y h h v v + 2 s s y^2 h v v + 4 y t z z l l h v \\
 + 2 t z z l l v h h - 4 y y s t z l h v \\
 - 2 s t z y l v h h - 2 y^2 s z l v v \\
 + 2 y t t z z l l h \qquad \qquad \qquad + t t z z l l h h \\
 - 2 t z s y^2 v l
 \end{array} \right\} G G. \\
 \text{le tout égal à } \theta.
 \end{array}$$

Où l'on observera que l'on auroit une égalité encore plus composée, si au lieu de *HF* on supposoit une ligne droite quelconque pour recevoir la Tangente ; mais aussi l'on en tireroit plusieurs avantages. On donnera dans un autre Mémoire la maniere de poursuivre avec les explications & les démonstrations nécessaires.

SUITE DE L'EXAMEN

DE LA LIGNE COURBE,

*Que décrivent les rayons de lumière en traversant
l'Atmosphere.*

PAR M. DE LA HIRE.

1702.
5. Août.

ON est convaincu par des observations très-exactes, que lorsqu'un rayon de lumière passe obliquement au-dedans de l'Atmosphere, des parties supérieures aux inférieures, il se détourne & prend une direction plus perpendiculaire à la surface de la terre, que celle qu'il avoit d'abord, de la même maniere qu'il arrive à un rayon lumineux qui passe d'un milieu plus rare dans un plus dense, comme de l'air dans l'eau, de l'eau dans le verre, & ainsi des autres. Il s'ensuit donc delà que les parties de l'Atmosphere qui sont plus proches de la terre, sont plus denses que celles qui sont plus élevées : c'est pourquoi on ne peut

qu'on voudra RD . Sur la ligne YDA qui termine l'Atmosphère, soit pris DY partie indéfiniment petite, & soit décrit la Parabole D_3X , qui passe par le point D , & qui ait pour axe YX perpendiculaire à YA , & que son sommet soit en X , & enfin que le rayon prolongé RD rencontre l'axe YX en S .

Par le point S soit mené ST parallèle à YA ou ordonnée dans la Parabole, & du point T soit appliqué TV égale à DS , entre le point T de la Parabole & son axe YX , & ainsi de suite en allant vers X , comme sont les lignes $2G, 3I$, &c. Je dis que ces ordonnées prises de suite dans la Parabole, comme $25, 3G$, &c. sont entr'elles comme les sinus des angles $2G_5, 3IG$, &c. ce qui est évident, puisque les lignes $2G, 3I$ sont égales entr'elles par la construction; car si l'on mene G_7 parallèle & égale à $3I$, le cercle décrit du centre G passera par les points 2 & 7 ; & les lignes 25 & $7I$ ou G_3 seront les sinus des angles $2G_5, 3IG$ ou IG_7 .

Mais aussi les carrés de ces ordonnées ou sinus $25, 3G$ sont entr'eux à cause de la Parabole, comme les lignes ou parties interceptées de l'axe X_5, XG , ou bien que les ordonnées sont les racines des carrés représentés par les parties interceptées de l'axe.

Enfin j'ai démontré dans mon Mémoire précédent sur les connoissances que nous avons de la nature de l'air, que les extensions ou dilatations de l'Atmosphère à différentes hauteurs, sont comme les racines des carrés représentés par la hauteur de l'Atmosphère, depuis sa plus grande compression jusqu'à ces différentes hauteurs, & que la lumière se détourne dans ces particules de l'Atmosphère ou de l'air de différente extension ou rareté, dans la raison des sinus de ces raretés, suivant l'hypothèse de M. de Fermat. Il s'en suit donc que le rayon lumineux dans l'Atmosphère à la hauteur de G avec la direction $2G$, se doit détourner & aller en G_7 , en s'approchant de l'axe YX , ou de la perpendiculaire à YA . Ce sera la même chose de toutes les autres parties, comme DS, TV , &c. C'est pourquoi il s'en suit

s'enfuit aussi que le rayon lumineux RD se détournera en entrant dans l'Atmosphère en D suivant les différentes inclinaisons de ces parties indéfiniment petites DS , VT , $2G$, $3I$, &c. & par conséquent toutes ces petites lignes feront les élémens de la Courbe formée par le rayon RD qui se rompt en traversant l'Atmosphère.

Il faut voir maintenant quelle est la nature de cette Courbe. Puisque toutes les lignes G_2 , I_3 , &c. sont les élémens de la Courbe, il est évident qu'elles feront aussi ses touchantes si elles sont prolongées. Et soit posé $XY = a$. $X\zeta = y$, & soit $YD = e$ indéfiniment petite. On aura donc par la nature de la Parabole $XY \mid X\zeta \parallel$ carré de $YD \mid$ carré de ζ_2 , ce qui est $a \mid y \parallel ee \mid \frac{ee y}{a} =$ au carré de ζ_2 . & $\zeta_2 = \sqrt{\frac{ee y}{a}}$.

Mais comme l'inclinaison de RD à DA est donnée, si l'on mène de quelque point R de la ligne RD , la perpendiculaire RA sur DA , on aura le rapport de RD à DA connu ou donné, lequel soit comme m est à n , & par conséquent $DS \mid DY \parallel m \mid n$, & enfin $DS = \frac{m e}{n}$.

Si l'on suppose donc que la Parabole soit prolongée en forte que l'ordonnée MN par le point M de l'axe, soit égale à DS ; le carré de YD fera au carré de MN comme XY à XM . Donc $XM = \frac{m m a}{n n}$, ce qui servira à comparer les DS , TV , G_2 , &c. toutes égales entr'elles, avec les ordonnées de la Parabole.

Soit donc l'ordonnée MN prolongée vers C , & une des touchantes de la Courbe G_2 aussi prolongée jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MN en C ; on aura donc $G\zeta \mid \zeta_2 \parallel GM \mid MC$, ce qui est

$$\sqrt{\frac{m m e e}{n n} - \frac{e e y}{a}} \mid \sqrt{\frac{e e y}{a}} \parallel \frac{m m a}{n n} - y \mid \frac{m m a \sqrt{\frac{e e y}{a}} - y \sqrt{\frac{e e y}{a}}}{\sqrt{\frac{m m e e}{n n} - \frac{e e y}{a}}}$$

$= MC$, ou bien

$$\frac{m m a \sqrt{\frac{y}{a}}}{n n} - y \sqrt{\frac{y}{a}} = MC.$$

Et quarrant & réduifant on a

$$\frac{m m a y - n n y y}{n n} = \text{quarré de } M C.$$

Ce qui est le produit de y par $\frac{m m a - n n y}{n n}$, ou bien de XG par GM . D'où l'on connoît que MC est toujours moyenne proportionnelle entre XG & GM ; & par conséquent si du point C on mene CE parallele à MX & XE & GB paralleles à MC , & si sur CE pour diamètre on décrit un demi-cercle, il passera nécessairement par le point G , & enfin CG sera une corde dans ce cercle, menée de l'extrémité du diamètre C . Et comme ce fera la même chose pour $I 3$ ou $G 7$ & toutes les autres, que pour $G 2$ & dans le même demi-cercle, il s'ensuit que toutes ces petites parties dans l'inclinaison où elles sont par rapport à MX feront des parties égales des cordes d'un même cercle, lesquelles partent toutes de la même extrémité C du diamètre CE , & par conséquent toutes ces petites parties seront les élémens d'une Cycloïde, dont CE est le diamètre du cercle générateur.

Il est facile à voir par cette construction & démonstration, que plus les rayons comme RD qui entrent dans l'Atmosphère, approchent de la perpendiculaire à la superficie de l'Atmosphère, la Cycloïde ou portion de Cycloïde qu'ils décrivent, aura un plus grand cercle générateur. Et qu'enfin si le rayon incident étoit perpendiculaire à YA , ce diamètre seroit d'une grandeur infinie, & la portion de Cycloïde seroit la ligne droite YX . Mais si ce rayon incident étoit comme joint ou infiniment proche de YA , ce rayon décriroit au-dedans de l'Atmosphère une demi-Cycloïde entière dont le diamètre du cercle générateur seroit YX , & c'est ce cas seulement que j'ai considéré dans mon premier Mémoire sur ce sujet.

Enfin si le rayon incident étoit au-dedans de l'Atmosphère, & incliné de telle manière qu'il fit avec YA un angle moindre que la touchante de la Cycloïde qui a YX pour diamètre de son cercle générateur, ne fait avec la même YA , & que ce rayon de lumière eût sa direction vers

le haut; il s'éleva dans l'Atmosphère jusqu'à une certaine hauteur suivant une Cycloïde, & ensuite il se réfléchira & retournera vers le bas de l'Atmosphère suivant la même Cycloïde; mais si ce rayon avoit d'abord sa direction vers le bas, il décrirait une portion de la même Cycloïde. La démonstration s'en fera de la même manière que celle du cas précédent; & l'on déterminera de même la hauteur de cette Cycloïde, ou bien, ce qui est la même chose, le diamètre de son cercle générateur, qu'on trouvera être XM , en sorte que le point M fera entre X & Y , & par conséquent moindre que XY .

Tout ce que je viens de dire des Cycloïdes doit s'entendre de même des Epicycloïdes qui seront les véritables lignes de la réfraction des rayons; à cause que les couches de l'Atmosphère sont circulaires, & que nous les avons supposées droites; mais cette différence ne change rien à la démonstration, puisqu'il arrive la même chose aux Epicycloïdes qu'aux Cycloïdes, en ce qui regarde leurs touchantes, comme je l'ai démontré dans mon Traité des Epicycloïdes.

Il y a quelques remarques particulières que j'ai faites sur l'application de ce Théorème à la mesure des réfractations, telles qu'elles nous paroissent, & que nous les observons dans la hauteur apparente des Astres; ce que je pourrai expliquer dans quelque autre Mémoire, si j'en puis tirer quelque utilité pour l'Astronomie.

OBSERVATIONS

SUR LA SCAMMONEE.

PAR M. BOULDUK.

LA Scammonée que l'on met, avec raison, au nombre des purgatifs violents, est, comme l'on sçait, le suc laiteux d'une plante de même nom, que l'on fait épais-

1702.
9. Août.

A a ij